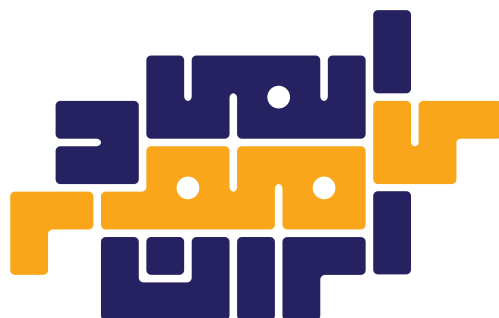


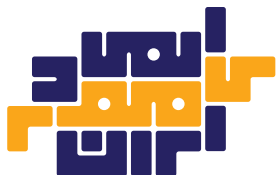


المپیاد کامپیوتر ایران

مرحله ی سوم سی و ششمین دوره ی المپیاد کامپیوتر ایران

آزمون روز دوم - ۲ شهریور ۱۴۰۵

- آزمون شامل سه سوال است. زمان آزمون ۲۰۰ دقیقه است.
- شما برای هر سوال می‌توانید حداکثر ۵۰ ارسال انجام دهید.
- بین هر دو ارسال متوالی برای یک سوال باید حداقل ۱۰ ثانیه فاصله باشد.
- موارد مبهم در سوالات را فقط از طریق قسمت Communication بپرسید.
- ترتیب سوالات به صورت کاملاً تصادفی انتخاب شده‌اند.
- نام کاربری شما برای ورود به سیستم day2 و رمز عبورتان minab است.



رخ‌ها (rooks)

یک جدول $n \times n$ داریم. می‌خواهیم در تعدادی از خانه‌های جدول رخ قرار دهیم به طوری که در هر خانه حداکثر یک رخ قرار گیرد. یک چیدمان را مطلوب می‌نامیم اگر در هر سطر و در هر ستون جدول دقیقاً دو رخ وجود داشته باشد. دو چیدمان زمانی متفاوت‌اند که دست‌کم یک خانه در یکی از آن‌ها دارای رخ و در دیگری خالی باشد.

تعداد چیدمان‌های مطلوب جدول $n \times n$ را با A_n نشان می‌دهیم. در سه بخش اول، باقی‌مانده A_n بر Δ را چاپ کنید.

زیرمسئله‌ها

- بخش اول (۹ نمره)

$n = 4$ است.

- بخش دوم (۳۴ نمره)

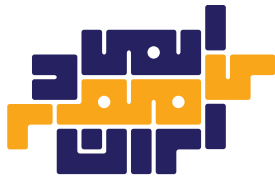
$n = 1000$ است.

- بخش سوم (۴۱ نمره)

$n = 10^6$ است.

- بخش چهارم (۱۶ نمره)

باقی‌مانده $\sum_{n=1}^{10^6} A_n$ بر Δ را چاپ کنید.



پله تا صفر (stairway)

سه عدد صحیح مثبت n, m, t داده شده‌اند. یک پله دنباله‌ای از اعداد صحیح است که

$$m \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n \geq 0.$$

همچنین h_{n+1} را برابر با ۰ تعریف می‌کنیم.

در ابتدای هر شب، تمام اندیس‌های i با شرط $h_i > h_{i+1}$ را پیدا می‌کنیم و سپس، به‌طور هم‌زمان، مقدار h_i را برای همه‌ی این اندیس‌ها یک واحد کاهش می‌دهیم. دقت کنید که اندیس‌ها بر اساس مقادیر ابتدای همان شب انتخاب می‌شوند. این فرایند تا زمانی ادامه می‌یابد که تمام مقادیر پله صفر شوند.

تعداد پله‌هایی را بیابید که تمام مقادیرشان برای نخستین بار در پایان شب t صفر می‌شوند؛ یعنی در پایان شب t همه‌ی مقادیر پله صفر باشند، اما در پایان شب $t-1$ حداقل یکی از مقادیر آن هنوز مثبت باشد. اگر این تعداد برابر A باشد، مقدار $A \bmod \Delta$ را چاپ کنید.

زیرمسئله‌ها

- بخش اول (۷ نمره)

$t = 3$ و $m = 3, n = 3$ است.

- بخش دوم (۱۹ نمره)

$t = 10$ و $m = 10, n = 10$ است.

- بخش سوم (۱۴ نمره)

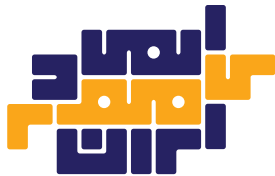
$t = 10^6$ و $m = 2, n = 10^6$ است.

- بخش چهارم (۲۷ نمره)

$t = 6\,000$ و $m = 5\,000, n = 5\,000$ است.

- بخش پنجم (۳۳ نمره)

$t = 1\,500\,000$ و $m = 10^6, n = 10^6$ است.



تورنمنت وارونگی‌ها (inv-tour)

جایگشت $a^{(0)} = \langle a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_k^{(0)} \rangle$ از اعداد 1 تا 2^k را در نظر بگیرید. این اعداد در یک تورنمنت حذفی شرکت می‌کنند. در دور اول، عضوهای اول و دوم با هم، عضوهای سوم و چهارم با هم و به همین ترتیب بازی می‌کنند. در هر بازی عدد بزرگ‌تر برنده می‌شود و به دور بعد می‌رود. ترتیب برنده‌ها در دور بعد حفظ می‌شود و بازی‌ها تا مشخص شدن قهرمان ادامه پیدا می‌کنند.

به بیان دقیق‌تر، برای هر $1 \leq t \leq k$ ، دنباله‌ی برنده‌های دور t را با $a^{(t)}$ نشان می‌دهیم؛ این دنباله 2^{k-t} عضو دارد و

$$a_i^{(t)} = \max(a_{2i-1}^{(t-1)}, a_{2i}^{(t-1)}).$$

اکنون دنباله‌ی نهایی b را با نوشتن طبقه‌های درخت تورنمنت از پایین به بالا می‌سازیم:

$$b = \langle a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \rangle.$$

وارونگی b یک جفت اندیس (i, j) است که $i < j$ و $b_i > b_j$ باشد.

از بین تمام $(2^k)!$ جایگشت ممکن، یکی را به صورت تصادفی و با احتمال برابر انتخاب می‌کنیم و فرایند بالا را روی آن انجام می‌دهیم. امید ریاضی تعداد وارونگی‌های دنباله‌ی نهایی را با E نشان می‌دهیم.

ابتدا مقدار E را به پیمانه‌ی $M = 10^9 + 7$ حساب کنید. منظور از پیمانه کردن یک عدد گویا مانند $\frac{p}{q}$ ، مقدار $p \times q^{-1} \pmod{M}$ است. اگر نماینده‌ی این مقدار در بازه‌ی $[0, M-1]$ برابر R باشد، در هر بخش باید باقی‌مانده‌ی R بر Δ را چاپ کنید.

برای مثال، اگر $k = 2$ و $a^{(0)} = \langle 3, 1, 2, 4 \rangle$ باشد، داریم $a^{(1)} = \langle 3, 4 \rangle$ و $a^{(2)} = \langle 4 \rangle$ ؛ در نتیجه $b = \langle 3, 1, 2, 4, 3, 4, 4 \rangle$ است و 3 وارونگی دارد.

زیرمسئله‌ها

• بخش اول (۷ نمره)

$k = 2$ است.

• بخش دوم (۱۹ نمره)

$k = 9$ است.

• بخش سوم (۲۳ نمره)

$k = 17$ است.

• بخش چهارم (۲۲ نمره)

$k = 1405$ است.

• بخش پنجم (۲۹ نمره)

$k = 14051405$ است.