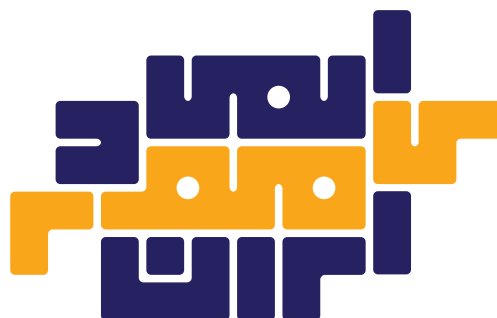


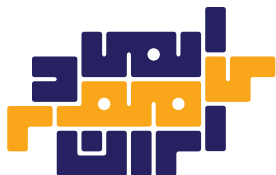


المپیاد کامپیوتر ایران

مرحله ی سوم سی و ششمین دوره ی المپیاد کامپیوتر ایران

آزمون روز اول - ۱ شهریور ۱۴۰۵

- آزمون شامل سه سوال است. زمان آزمون ۲۰۰ دقیقه است.
- شما برای هر سوال می‌توانید حداکثر ۵۰ ارسال انجام دهید.
- بین هر دو ارسال متوالی برای یک سوال باید حداقل ۱۰ ثانیه فاصله باشد.
- موارد مبهم در سوالات را فقط از طریق قسمت Communication بپرسید.
- ترتیب سوالات به صورت کاملاً تصادفی انتخاب شده‌اند.
- نام کاربری شما برای ورود به سیستم day1 و رمز عبورتان sharifut است.



بلوک‌های هم‌قله (equal-peak)

دو عدد صحیح مثبت n و m داده شده‌اند. تمام دنباله‌های به طول n را که اعضایشان از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, m\}$ انتخاب شده‌اند، در نظر بگیرید. اعضای یک دنباله لزوماً متمایز نیستند و می‌توانند با یکدیگر برابر باشند.

روی هر دنباله می‌توان عملیات زیر را به تعداد دلخواه انجام داد: سه اندیس ℓ, r, s را که

$$1 \leq \ell \leq r < s \leq n$$

هستند انتخاب کنید، به‌طوری‌که دو بلوک مجاور

$$A_\ell, A_{\ell+1}, \dots, A_r \quad \text{و} \quad A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_s$$

بیشینه‌ی یکسانی داشته باشند؛ یعنی

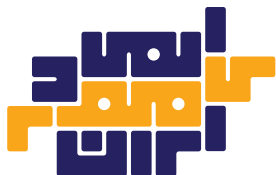
$$\max_{\ell \leq i \leq r} A_i = \max_{r+1 \leq j \leq s} A_j.$$

سپس جای این دو بلوک را عوض کنید. ترتیب عضوهای داخل هر بلوک تغییر نمی‌کند.

دنباله‌ها را به گروه‌هایی تقسیم می‌کنیم. دو دنباله در یک گروه قرار می‌گیرند اگر بتوان با انجام صفر یا چند عملیات، یکی را به دیگری تبدیل کرد. تعداد گروه‌های حاصل از تمام m^n دنباله را با C نشان دهید. مقدار $C \bmod \Delta$ را چاپ کنید.

زیرمسئله‌ها

- بخش اول (۷ نمره)
 $n = 2$ و $m = 3$ است.
- بخش دوم (۱۸ نمره)
 $n = 7$ و $m = 4$ است.
- بخش سوم (۱۵ نمره)
 $n = 600$ و $m = 2$ است.
- بخش چهارم (۳۱ نمره)
 $n = 600$ و $m = 100$ است.
- بخش پنجم (۲۹ نمره)
 $n = 1000$ و $m = 10^6$ است.



آرایه‌های خوب (good-arrays)

آرایه‌ی a به طول n را در نظر بگیرید که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $1 \leq a_i \leq n$ است. می‌گوییم آرایه‌ی a خوب است، اگر آرایه‌ای مانند b به طول n وجود داشته باشد که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $1 \leq b_i \leq n$ باشد و آرایه‌ی

$$\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n \rangle$$

اکیداً صعودی باشد؛ یعنی برای هر $1 \leq i < n$ داشته باشیم $a_i + b_i < a_{i+1} + b_{i+1}$. تعداد آرایه‌های خوب به طول n را با G'_n نشان می‌دهیم. در شش بخش اول، باقی‌مانده‌ی G'_n بر Δ را حساب کنید.

زیرمسئله‌ها

- بخش اول (۳ نمره)

$n = 3$ است.

- بخش دوم (۱۴ نمره)

$n = 7$ است.

- بخش سوم (۱۷ نمره)

$n = 100$ است.

- بخش چهارم (۱۱ نمره)

$n = 500$ است.

- بخش پنجم (۱۸ نمره)

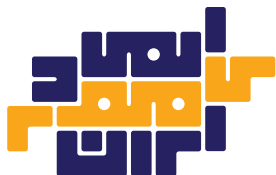
$n = 5000$ است.

- بخش ششم (۲۲ نمره)

$n = 10^6$ است.

- بخش هفتم (۱۵ نمره)

باقی‌مانده‌ی $\sum_{n=1}^{10^6} G'_n$ بر Δ را حساب کنید.



توان زوج‌ها (pair-power)

آرایه‌ی a شامل n عدد صحیح مثبت است. برای هر جفت اندیس متمایز $1 \leq i < j \leq n$ ، عدد زیر را در نظر بگیرید:

$$b_{i,j} = a_i^{a_j} \times a_j^{a_i}.$$

عدد A را برابر کوچک‌ترین مضرب مشترک همه‌ی اعداد $b_{i,j}$ تعریف می‌کنیم؛ یعنی

$$A = \text{lcm}_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j}.$$

مقدار $A \bmod \Delta$ را چاپ کنید.

زیرمسئله‌ها

• بخش اول (۷ نمره)

$n = 3$ و $a = \langle 2, 3, 5 \rangle$ است.

• بخش دوم (۲۳ نمره)

$n = 97$ است و برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم: $a_i = i$.

• بخش سوم (۲۹ نمره)

$n = 997$ و $a_1 = 2$ است. برای هر $2 \leq i \leq n$ داریم:

$$a_i = 1 + 2((i - 2) \bmod 499).$$

• بخش چهارم (۴۱ نمره)

$n = 9973$ است. دنباله‌ی s را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_1 = 1405, \quad s_{i+1} = (1401s_i + 1403) \bmod 100000.$$

برای هر $1 \leq i \leq n$ ، مقدار $a_i = s_i + 1$ است.