مسئله‌ی ۱. ابوموسی .... (۱۸ نمره)

تنب کوچک و تنب بزرگ باهم روی یک جدول ۱×۱۴۰۵ بازی می‌کنند. در ابتدای بازی، تمام خانه‌های جدول خالی هستند.

در هر مرحله، تنب کوچک یک مستطیل ۱×۲ خالی از جدول را انتخاب می‌کند و تنب بزرگ یکی از دو خانه‌ی آن را پر می‌کند. این کار آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا دیگر تنب کوچک نتواند مستطیلی انتخاب کند. تنب کوچک می‌خواهد در انتها تعداد خانه‌های پرشده کمینه شود و تنب بزرگ می‌خواهد تعداد این خانه‌ها بیشینه شود.

اگر هر دو برای رسیدن به هدفشان به بهترین شکل ممکن بازی کنند، در نهایت چه تعداد از خانه‌ها پر خواهد بود؟

حل. خانه‌های جدول را به ترتیب از چپ به راست با شماره‌های ۱ تا ۱۴۰۵ شماره‌گذاری می‌کنیم و برای هر دو نفر، یک استراتژی برای رسیدن به هدفشان ارائه می‌دهیم؛

تنب بزرگ برای پر کردن خانه‌ها به ترتیب اولویت زیر را دارد:

- خانه‌های $۳k$ اُم (خانه‌های شماره‌ی $۳, ۶, ۹, \ldots$)
- خانه‌های $۳k + ۱$ اُم (خانه‌های شماره‌ی $۱, ۴, ۷, \ldots$)
- خانه‌های $۳k + ۲$ اُم (خانه‌های شماره‌ی $۲, ۵, ۸, \ldots$)

با پیروی از این اولویت‌دهی، می‌توان نشان داد که در نهایت، داخل هر سه خانه‌ی متوالی به فرم $\langle ۳k + ۱, ۳k + ۲, ۳k + ۳ \rangle$، حداقل دو خانه پر خواهند شد و در مجموع حداقل $۹۳۶ = \lfloor \frac{۲ \times ۱۴۰۵}{۳} \rfloor$ خانه‌ی پرشده خواهیم داشت.

تنب کوچک نیز برای رنگ کردن جدول، یک روش استقرایی ارائه می‌دهد که در آن $f(n)$ را برابر حداکثر خانه‌های پرشده در یک جدول $۱ \times n$ درنظر می‌گیریم:

- در ابتدا مستطیل $\langle ۲, ۳ \rangle$ را انتخاب می‌کند.
- اگر تنب بزرگ خانه‌ی ۳ را پر کرد، تنب کوچک مستطیل $\langle ۱, ۲ \rangle$ را انتخاب می‌کند و طبق فرض استقرا $f(n) = f(n - ۳) + ۲$ خواهد بود.
- اگر تنب بزرگ خانه‌ی ۲ را پر کرد، طبق فرض استقرا $f(n) = f(n - ۲) + ۱$ خواهد بود.

از آن‌جا که تنب بزرگ هدفش بیشینه کردن خانه‌های پرشده است، نتیجه می‌شود که:

$$f(n) = \max(f(n - ۳) + ۲, f(n - ۲) + ۱).$$

با حل کردن این معادله، به مقدار $f(۱۴۰۵) = ۹۳۶$ می‌رسیم. □

مسئله‌ی ۲. آتروپاتن .... (۲۰ نمره)

در سرزمین آتروپاتن ۱۴۰۵ شهر وجود دارد. بین ۱۴۰۴ جفت از این شهرها جاده وجود دارد، به طوری که می‌توان به وسیله‌ی آن‌ها از هر شهری به هر شهر دیگر سفر کرد. نقشه‌ی این سرزمین گم شده است و ما نمی‌دانیم بین کدام شهرها جاده وجود دارد.

به هر نقشه‌ای که این شرایط را داشته باشد، یک «نقشه‌ی ممکن» برای آتروپاتن می‌گوییم. در یک نقشه‌ی ممکن برای آتروپاتن، یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از شهرها «خودکفا» نامیده می‌شود اگر بین هر دو شهر داخل آن، بتوان بدون عبور از شهرهای خارج آن سفر کرد. توجه داشته باشید که هر شهر به تنهایی نیز یک مجموعه‌ی خودکفا محسوب می‌شود.

«ارزش» هر نقشه‌ی ممکن برای آتروپاتن، تعداد زیرمجموعه‌های خودکفای متمایز در آن است.

الف) کمترین ارزش میان تمام نقشه‌های ممکن برای آتروپاتن چند است؟ (۱۰ نمره)

ب) بیشترین ارزش میان تمام نقشه‌های ممکن برای آتروپاتن چند است؟ (۱۰ نمره)

حل. گراف شهر آتروپاتن به شکل یک درخت با ۱۴۰۵ راس و ۱۴۰۴ یال است.

در درخت، هر راس به تنهایی و مسیر بین هر دو راس دلخواه از آن، تشکیل یک زیرمجموعه‌ی خودکفا می‌دهد. بنابراین، حداقل ارزش یک درخت با ۱۴۰۵ راس، برابر با $\binom{۱۴۰۶}{۲}$ است. گراف موردنیاز برای رسیدن به این مقدار، یک مسیر با ۱۴۰۵ راس است (گراف $P_{۱۴۰۵}$).

همچنین هر زیرمجموعه‌ی ناتهی با بیش از ۱ راس از درخت را می‌توان بر حسب مجموعه‌ی یال‌های آن زیرمجموعه بیان کرد. از آن‌جا که ۱۴۰۴ یال در درخت وجود دارد، حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های خودکفا (با حداقل ۱ یال) برابر با $۲^{۱۴۰۴} - ۱$ است. در نتیجه، حداکثر ارزش یک درخت با ۱۴۰۵ راس، برابر با $۲^{۱۴۰۴} + ۱۴۰۴$ است. گراف موردنیاز برای رسیدن به این مقدار، یک ستاره با ۱۴۰۵ راس است (گراف $S_{۱۴۰۵}$). □

مسئله‌ی ۳. هرمز .... (۲۰ نمره)

روباهی نامرئی داخل یکی از خانه‌های یک جدول ۱×۱۴۰۵ قرار دارد. هرمز می‌خواهد روباه را شکار کند، ولی از موقعیت آن آگاه نیست.

در هر مرحله، هرمز به یکی از خانه‌های جدول شلیک می‌کند. اگر روباه در آن خانه باشد، شکار می‌شود. در غیر این صورت، روباه به خانه‌ی مجاوری فرار می‌کند که فاصله‌اش را از خانه‌ای که در این مرحله به آن شلیک شده بیشتر می‌کند. اگر روباه داخل یکی از خانه‌های ابتدا یا انتهای جدول باشد، در جای خود ثابت می‌ماند.

هرمز حداقل چند شلیک لازم دارد تا همواره بتواند روباه را شکار کند؟

حل. فرض کنید در هر یک از ۱۴۰۵ خانه‌ی جدول یک روباه قرار دارد و هر کدام با شلیک هرمز مشابه آنچه در سوال گفته شده فرار می‌کنند. اطمینان هرمز از شکار شدن روباه نامرئی در سوال معادل این است که تمام این ۱۴۰۵ روباه شکار شوند. کم‌ترین تعداد شلیک برای این که تمام این روباه‌ها شکار شوند ۴۷۰ است.

خانه‌ها و روباه‌های ساکن هر یک را به ترتیب از چپ به راست از ۱ تا ۱۴۰۵ نامگذاری می‌کنیم. هرمز برای این که تمام روباه‌ها را در ۴۷۰ حرکت شکار کند، ابتدا به خانه‌ی ۹۳۶ شلیک می‌کند. بعد از آن به خانه‌ی ۹۳۴ شلیک می‌کند و روباه ۹۳۵ در آن شکار می‌شود. با ادامه‌ی همین روند، به خانه‌های زوج به ترتیب نزولی (یعنی $۹۳۲, ۹۳۰, \dots, ۲$) شلیک می‌کند. بعد از این ۴۶۸ شلیک، تمام روباه‌های ۴۶۹ تا ۹۳۶ شکار شده‌اند. تا این مرحله، روباه‌های ۱ تا ۴۶۸ در هر شلیک یک خانه به سمت چپ فرار کرده‌اند یا در صورتی که در خانه‌ی ۱ بوده‌اند همان جا مانده‌اند؛ پس اکنون همه در خانه‌ی ۱ هستند. در گام بعد، هرمز به خانه‌ی ۱ شلیک می‌کند و تمام این روباه‌ها شکار می‌شوند. بعد از این حرکت، به طریق مشابه روباه‌های ۹۳۷ تا ۱۴۰۵ همگی در خانه‌ی ۱۴۰۵ قرار دارند و هرمز با یک شلیک به آن خانه تمام آن‌ها را شکار می‌کند. بدین ترتیب با ۴۷۰ حرکت تمام روباه‌ها شکار شده‌اند.

حالا اثبات می‌کنیم این تعداد شلیک برای شکار تمام روباه‌ها لازم است. در هر زمان یک خانه از جدول را **امن** می‌نامیم اگر روباهی در آن نباشد. ادعا می‌کنیم با هر شلیک، تعداد خانه‌های امن حداکثر سه تا افزایش می‌یابد.

خانه‌ی x در سمت چپ شلیک که $x > ۱$ و قبل از شلیک ناامن بوده را در نظر بگیرید. بعد از شلیک، روباه‌هایی که در آن بودند به خانه‌ی سمت چپ آن فرار می‌کنند و $x - ۱$ قطعا ناامن خواهد بود. بدین صورت تناظر یک به یکی میان خانه‌های ناامن قبل و بعد شلیک ایجاد می‌شود و در سمت چپ خانه‌ای که به آن شلیک شده، حداکثر یک خانه‌ی ناامن کم می‌شود. به طریق مشابه در سمت راست شلیک هم همین اتفاق رخ می‌دهد. خود خانه‌ای که به آن شلیک شده هم امن می‌شود که می‌تواند خانه‌های امن را یکی بیش‌تر کند.

هرمز حتما باید به هر دو خانه‌ی ابتدا و انتهای جدول شلیک کند زیرا روباه‌های آن‌ها هرگز حرکت نمی‌کنند. طبق آنچه درباره‌ی افزایش تعداد خانه‌های امن گفته شد، شلیک به آن‌ها حداکثر دو تا به تعداد خانه‌های امن می‌افزاید. هم‌چنین اگر قبل از شلیک آخر بیش از یک خانه‌ی ناامن باقی مانده باشد، هرمز نخواهد توانست همه‌ی خانه‌ها را امن کند. بنابراین شلیک آخر حداکثر یک خانه‌ی امن اضافه می‌کند، شلیک دیگری وجود دارد که به ابتدا یا انتهای جدول است و حداکثر دو خانه‌ی امن اضافه می‌کند، و سایر شلیک‌ها هم حداکثر سه خانه‌ی امن اضافه می‌کنند. با این حساب، حداقل شلیک ها برای رسیدن از ۰ به ۱۴۰۵ خانه‌ی امن، $۴۷۰ = ۱ + \lceil \frac{۱۴۰۵}{۳} \rceil$ تاست. □

مسئله‌ی ۴. به یاد میناب ....(۲۲ نمره)

یک جدول ۸×۸ داریم که می‌خواهیم خانه‌های آن را با کاشی‌های $k \times ۱$ و $۱ \times k$ بپوشانیم. در این‌جا، k عددی طبیعی است و مقدار آن برای کاشی‌های مختلف می‌تواند متفاوت باشد.

این کاشی‌کاری باید به گونه‌ای انجام شود که هر خانه‌ی جدول توسط دقیقا یک کاشی پوشانده شده باشد و به ازای هر مربع ۲×۲ از جدول، دقیقا از ۳ کاشی متفاوت برای پوشاندن خانه‌های آن استفاده شده باشد.

الف) حداقل تعداد کاشی برای انجام این کار چیست؟ (۱۱ نمره)

ب) حداکثر تعداد کاشی برای انجام این کار چیست؟ (۱۱ نمره)

حل. فرض کنید روی هر کدام از ۸۱ راس جدول یک راس قرار داده‌ایم و بین برخی از آنها با توجه به نحوه کاشی‌کاری یال می‌کشیم. نحوه کشیدن یال‌ها به این صورت است که به ازای هر دو خانه مجاور از جدول که توسط یک کاشی پوشانده شده‌اند، یک یال میان دو راس مشترک آن دو خانه قرار می‌دهیم.

به طور دقیق‌تر، فرض کنید به رئوس جدول مختصات به شکل (i, j) برای $۰ \leqslant i, j \leqslant ۸$ نسبت می‌دهیم. خانه‌ای از جدول که مختصات راس بالا–چپ آن (x, y) است را هم با $[x, y]$ نشان می‌دهیم. حال به ازای هر دو خانه مجاور متعلق به یک کاشی از جدول با مختصات‌های $[x, y]$ و $[x, y + ۱]$، بین رئوس $(x, y + ۱)$ و $(x + ۱, y + ۱)$ یال کشیده و به ازای خانه‌های با مختصات $[x, y]$ و $[x + ۱, y]$، بین رئوس $(x + ۱, y)$ و $(x + ۱, y + ۱)$ یال می‌کشیم.

لم. یک کاشی‌کاری معتبر است اگر و تنها اگر گرافی که با فرایند بالا از روی آن ساخته می‌شود یک تطابق باشد که هیچکدام از رئوس میانی (رئوس با $۱ \leqslant x, y \leqslant ۷$) در آن تنها نماند.

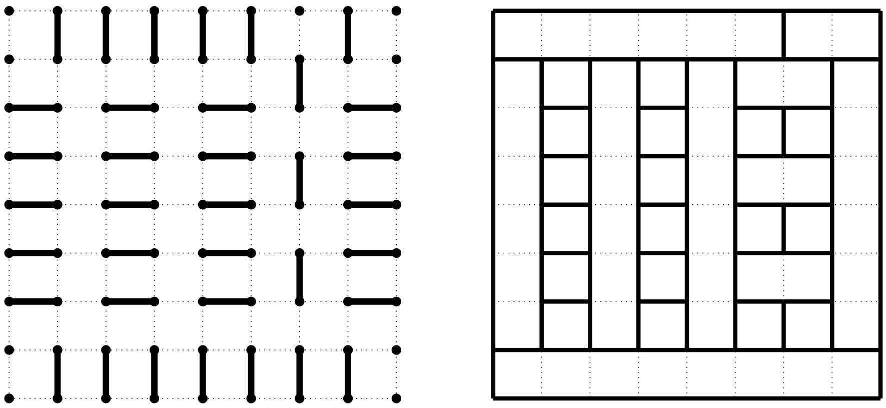
اثبات. فرض کنید کاشی‌کاری معتبر است و می‌خواهیم قسمت دیگر را اثبات کنیم. یکی از رئوس میانی جدول را در نظر بگیرید. اگر این راس در تطابق نباشد یعنی هر چهار خانه‌ای که اطراف این راس هستند متعلق به کاشی‌های مختلفی‌اند و شرط سوال برای این مربع ۲×۲ نقض می‌شود. به شکل مشابه اگر درجه این راس بیشتر از یک باشد یعنی کمتر از سه کاشی این مربع را پوشانده‌اند. پس درجه تمام رئوس میانی باید یک باشد. طرف دیگر این لم هم با برهان خلف و به شکل مشابه قابل اثبات است.

اگر تعداد یال‌هایی از تطابق که روی محیط جدول نیستند را با m نشان دهیم، تعداد کاشی‌ها برابر با $۶۴ - m$ است. در نتیجه هدف سوال پیدا کردن بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای m است.

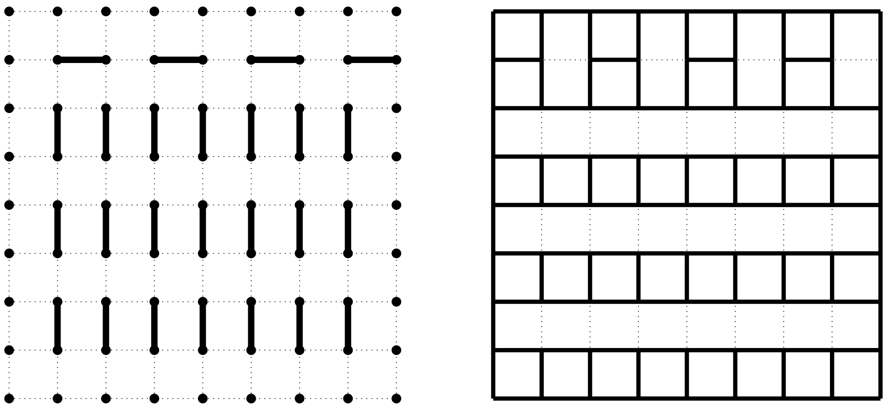
در بخش الف می‌خواهیم مقدار m را بیشینه کنیم. از میان ۴۹ راس میانی، ۲۴ تا از آنها می‌توانند با یکی از راس‌های محیط جدول یال داشته باشند. در نتیجه $m \leqslant \lfloor \frac{۴۹+۲۴}{۲} \rfloor = ۳۶$ و تعداد کاشی‌ها حداقل ۲۸ است.

در بخش ب از آنجا که تعداد رئوس میانی جدول ۴۹ تا است و هر یال تطابق حداکثر ۲ تا از آنها را پوشش می‌دهد، در نتیجه $m \geqslant \lceil \frac{۴۹}{۲} \rceil = ۲۵$ و تعداد کاشی‌ها حداکثر ۳۹ است.

یک نمونه کاشی‌کاری معتبر با ۲۸ کاشی و گراف متناظرش با ۳۶ یال به شکل زیر است:



یک نمونه کاشی‌کاری معتبر با ۳۹ کاشی و گراف متناظرش با ۲۵ یال به شکل زیر است:



□