

مرحله‌ی دوم سی و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور – آزمون چندگزینه‌ای (پاسخ‌نامه)

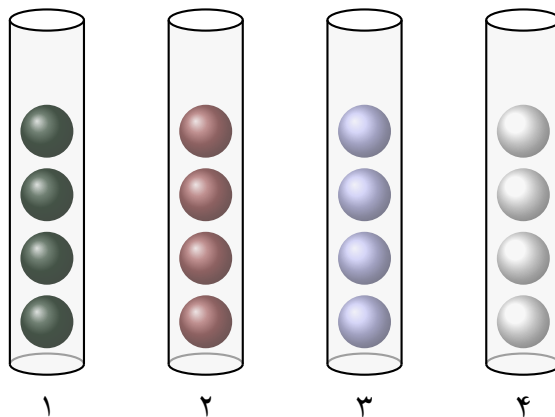
- آزمون ۲۰ سوال دارد و زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به صورت تصادفی است.
- سؤال‌های ۱۹ و ۲۰ در یک دسته‌ی دوسؤالی آمده‌اند و قبل از آن دسته، توضیح مربوطه ارائه شده است.

۱ یک جدول $n^2 \times n^2$ داریم که می‌خواهیم در n^2 خانه‌ی آن عروسک قرار دهیم به طوری که در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک عروسک قرار بگیرد. همچنین اگر جدول را به n^2 مربع $n \times n$ افزایش کنیم (که تنها یک روش یکتا برای این افزایش وجود دارد)، در هر مربع نیز دقیقاً یک عروسک قرار بگیرد. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟

- (۱) $(n!)^{n^2}$ (۲) $(n!)^{2n}$ (۳) $(n!)^n$ (۴) $\frac{(n^2)!}{(n!)^n}$ (۵) $(n!)^{n+1}$

□ پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

۲ شادی یک بازی طراحی کرده است. بازی او ۴ استوانه‌ی عمودی با شماره‌های ۱ تا ۴ دارد که در هر کدام ۵ توپ روی هم جا می‌شوند. همچنین ۱۶ توپ در ۴ رنگ مختلف موجود است به طوری که از هر رنگ دقیقاً ۴ توپ داریم. در ابتدا در هر استوانه، ۴ توپ دلخواه روی هم قرار داده می‌شوند. بازی به این صورت است که بازیکن هر بار می‌تواند توپ بالای یک استوانه را بردارد و از بالا درون یک استوانه‌ی دیگر بیندازد (به شرطی که جا داشته باشد). ترتیب توپ‌های درون یک استوانه را نمی‌توان مستقیماً تغییر داد. در نهایت اگر بازیکن به حالتی برسد که توپ‌های هر استوانه هم‌رنگ باشند، بازی را می‌برد. در چند تا از حالت‌های اولیه‌ی قرار گرفتن توپ‌ها در استوانه‌ها، بازیکن می‌تواند ببرد؟



- (۱) ۲۵۲۰ (۲) ۳۶۹۶۰۰ (۳) ۶۰۴۸۰ (۴) ۸۸۷۰۴۰۰ (۵) ۱۴۵۱۵۲۰

□ پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

۳ دنباله‌ی $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ را در نظر بگیرید که هر عضو آن، یکی از دو عملگر «>» یا «<» است. یک جایگشت a از اعداد ۱ تا ۷ را مطابق با b می‌نامیم، اگر به ازای هر $1 \leq i \leq 6$ ، گزاره‌ی $a_i b_i a_{i+1}$ صحیح باشد. a_i عنصر i ام جایگشت a است. امتیاز یک دنباله‌ی b از عملگرها برابر تعداد جایگشت‌های مطابق با آن است. حداکثر امتیازی که یک دنباله از عملگرها می‌تواند داشته باشد چند است؟

۱۶۹ (۵)

۱۹۲ (۴)

۲۷۲ (۳)

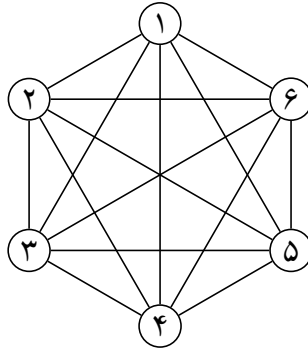
۱۴۴ (۲)

۲۸۸ (۱)

□

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

۴ هدی یک گراف کامل ۶ رأسی دارد. او یال‌های یک مثلث از این گراف را رنگ کرده است. کوشا می‌تواند در هر مرحله یک مثلث انتخاب کند تا هدی به او بگوید که چند یال از آن مثلث رنگی هستند. کوشا به حداقل چند پرسش نیاز دارد تا همواره بتواند بفهمد که دقیقاً کدام یال‌ها رنگی هستند؟



۴ (۵)

۸ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

□

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

۵ توابع $f(A, m)$ و $g(A, B)$ به شکل زیر تعریف شده‌اند: (در این سوال، تمامی آرایه‌ها به طول ۱۰، و با اندیس‌های ۱ تا ۱۰ هستند.)

- تابع f آرایه‌ی A و عدد طبیعی m را ورودی می‌گیرد و یک آرایه‌ی F خروجی می‌دهد به طوری که عنصر i آرایه‌ی F به شکل $F_i = \sum_{k=1}^i (A_k \bmod m)$ باشد، که در آن $A_k \bmod m$ به معنی باقی‌مانده‌ی تقسیم عنصر k آرایه‌ی A بر m است.

- تابع g آرایه‌های A و B را ورودی می‌گیرد و یک آرایه‌ی G خروجی می‌دهد به طوری که عنصر i آرایه‌ی G برابر حاصل تفریق عنصر i آرایه‌ی A از عنصر i آرایه‌ی B باشد، یعنی $G_i = B_i - A_i$.

آرایه‌ی $(g(f(\pi, 2), f(\pi, 3)))$ را به ازای تمامی جایگشت‌های π از اعداد ۱ تا ۱۰ محاسبه کرده‌ایم. در میان آرایه‌های محاسبه‌شده، چند آرایه‌ی متمایز وجود دارد؟

۱۰! (۵)

۲۲۶۸۰۰ (۴)

۲۵۲۰۰ (۳)

۱۸۹۰۰ (۲)

۶۳۰۰ (۱)

□

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

۶ دور دایره‌ای ۸ لامپ قرار دارد که در ابتدای کار، ۳ تا از آن‌ها با موقعیت‌های تصادفی روشن، و بقیه خاموش هستند (همه‌ی ۵۶ حالت ممکن برای وضعیت اولیه‌ی لامپ‌ها احتمال یکسانی دارند). در هر مرحله، می‌توانیم یک لامپ روشن را انتخاب و آن را خاموش کنیم. با انجام این کار، یک لامپ خاموش به صورت تصادفی روشن می‌شود. احتمال روشن شدن همه‌ی لامپ‌های خاموش برابر است و لامپی که تازه خاموش شده هم ممکن است روشن شود. هدف این است که در نهایت، لامپ‌های روشن دور دایره متوالی باشند. در صورت پیش گرفتن بهترین استراتژی، امید ریاضی تعداد مراحل انجام شده برای رسیدن به هدف چند است؟

مرحله‌ی دوم سی و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای (پاسخ‌نامه)

۳ (۱) $\frac{20}{7}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{19}{7}$ (۴) $\frac{216}{56}$ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

۷ ۱۰ توپ در یک ردیف چیده شده‌اند. می‌خواهیم هر یک از این توپ‌ها را با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ‌آمیزی کنیم. یک رنگ‌آمیزی را خوش‌ترکیب می‌نامیم اگر هیچ دو توپ مجاور در آن به رنگ قرمز نباشند. مجموع تعداد توپ‌های آبی به‌ازای همه‌ی رنگ‌آمیزی‌های خوش‌ترکیب چند است؟

۲۰۴۰ (۱) ۶۵۵ (۲) ۹۸۰ (۳) ۱۴۰۰ (۴) ۱۰۲۰ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

۸ الگوریتم زیر را به‌ازای تمامی اعداد صحیح از ۰ تا ۲۳ برای متغیر x اجرا کرده‌ایم. حاصل جمع اعداد خروجی برابر چند است؟

۱. متغیر x را ورودی بگیر.
۲. مقدار i را برابر ۱۰ و مقادیر c و s را برابر ۰ قرار بده.
۳. اگر x فرد بود، به گام ۶ برو.
۴. اگر مقدار c منفی بود، آن را برابر ۰ قرار بده.
۵. به مقدار c یکی اضافه کن. به گام ۸ برو.
۶. اگر مقدار c مثبت بود، آن را برابر ۰ قرار بده.
۷. از مقدار c یکی کم کن.
۸. اگر مقدار قدرمطلق c حداقل ۴ بود، به مقدار s یکی اضافه کن.
۹. از مقدار i یکی کم کن. مقدار x را برابر با $\lfloor \frac{x}{4} \rfloor$ قرار بده.
۱۰. اگر i مثبت بود، به گام ۳ برو.
۱۱. s را خروجی بده.

۷۶۸ (۱) ۲۰۴۸ (۲) ۳۸۴ (۳) ۸۹۶ (۴) ۴۴۸ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

۹ در یک دنباله از اعداد متمایز، می‌گوییم دو عضو با هم نابه‌جایی دارند اگر عدد کوچکتر بعد از عدد بزرگتر در دنباله آمده باشد. چنین دنباله‌ای را فرد-نابه‌جا می‌نامیم اگر تعداد کل نابه‌جایی‌ها در آن فرد باشد. برای یک جایگشت از اعداد، هر افراز آن به تعدادی زیردنباله‌ی متوالی یک تفکیک نامیده می‌شود. تعداد زیردنباله‌های فرد-نابه‌جا در یک تفکیک را امتیاز آن تفکیک می‌نامیم. مقام یک جایگشت به بیشترین امتیاز میان تمام تفکیک‌های آن جایگشت گفته می‌شود. حاصل جمع مقام همه‌ی جایگشت‌های به طول ۵ چه قدر است؟

۱۹۱ (۱) ۲۱۳ (۲) ۱۸۹ (۳) ۲۱۲ (۴) ۱۹۰ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

مرحله‌ی دوم سی و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور – آزمون چندگزینه‌ای (پاسخ‌نامه)

۱۰ سحر و بامداد می‌خواهند با ۱۰ کارت بازی کنند که روی هر کدام، یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است (هر عدد، روی دقیقا یک کارت). ابتدا سحر این کارت‌ها را به ۵ جفت تقسیم می‌کند و در ادامه از هر جفت، به طور تصادفی یک کارت را به بامداد می‌دهد و یک کارت را برای خود برمی‌دارد تا هر کدامشان ۵ کارت داشته باشند. در پایان، بامداد یکی از کارت‌های سحر را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند و آن را با بزرگ‌ترین کارت خود مقایسه می‌کند. اگر کارت بامداد بزرگ‌تر باشد، او برنده می‌شود، و در غیر این صورت، سحر برنده‌ی بازی خواهد بود. اگر سحر بهینه بازی کند، احتمال برد او چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{13}{80}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{31}{160}$ (۵) $\frac{5}{33}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است. □

۱۱ به چند طریق می‌توانیم ۵ مهره‌ی رُخ را در یک صفحه‌ی شطرنج 5×5 بچینیم، به طوری که مهره‌ی رخی وجود داشته باشد که از حداقل ۳ رخ دیگر بترسد؟ یک مهره‌ی رخی از یک رخ دیگر می‌ترسد اگر و تنها اگر در یک سطر یا یک ستون باشند، حتی اگر بین آن دو، مهره‌های رخی دیگری وجود داشته باشند.

- (۱) ۱۶۳۰۰ (۲) ۱۷۱۱۰ (۳) ۱۷۲۰۰ (۴) ۱۷۲۱۰ (۵) ۱۶۳۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است. □

۱۲ یک دنباله‌ی ناتهی از ارقام را متقارن می‌نامیم هرگاه وارون این دنباله (از راست به چپ) با خودش (از چپ به راست) برابر باشد. برای مثال ۱۲۱ یک دنباله‌ی متقارن است. یک دنباله از اعداد را موزون می‌نامیم اگر بتوان آن را از به هم چسباندن دقیقا دو دنباله‌ی متقارن دیگر به دست آورد. برای مثال ۱۲۱۳۳ موزون است چون می‌توان آن را از به هم چسباندن ۱۲۱ و ۳۳ ساخت. از هر یک از اعداد ۱ تا ۴، سه کارت داریم (در مجموع ۱۲ کارت). می‌خواهیم با این کارت‌ها یک دنباله‌ی ۴ عضوی بسازیم که موزون باشد. با این روش چند دنباله‌ی متمایز می‌توان ساخت؟ دو دنباله متمایزند اگر و تنها اگر حداقل در یک جایگاه رقم‌های متفاوتی داشته باشند.

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۳۲ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۰۸ (۵) ۱۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است. □

۱۳ به یک گراف ساده بچه کاکتوس می‌گوییم اگر با اضافه کردن دقیقا یک یال به یک درخت بتوان آن را ساخت. چند بچه کاکتوس ۵ رأسی وجود دارد که از رأس‌های با شماره‌های ۱ تا ۵ ساخته شده باشد؟

- (۱) ۲۲۲ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۵۲ (۴) ۲۱۰ (۵) ۱۹۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است. □

۱۴ ۸ کیسه داریم که در هر کدام ۸ سکه‌ی نقره یا طلا وجود دارد. می‌دانیم در کل ۶ سکه‌ی طلا و ۵۸ سکه‌ی نقره در کیسه‌ها وجود دارد به طوری که در ۵ کیسه، همه‌ی سکه‌ها نقره و در ۳ کیسه‌ی دیگر، یک، دو و سه سکه‌ی طلا وجود دارد (یعنی یک کیسه ۱ سکه‌ی طلا و ۷ سکه‌ی نقره، یک کیسه ۲ سکه‌ی طلا و ۶ سکه‌ی نقره، و کیسه‌ی دیگر ۳ سکه‌ی طلا و ۵ سکه‌ی نقره). کیسه‌ها همگی مشابه هستند و ما در ابتدا از محتویات آن‌ها اطلاع نداریم. به‌طور تصادفی ۴ کیسه را انتخاب می‌کنیم و محتویات آن‌ها را نگاه می‌کنیم. سپس یکی از ۸ کیسه را انتخاب می‌کنیم و یکی از سکه‌های داخل آن را به طور تصادفی برمی‌داریم (احتمال برداشتن همه‌ی سکه‌های داخل آن

مرحله‌ی دوم سی و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور – آزمون چندگزینه‌ای (پاسخ‌نامه)

کیسه برابر است). ما کیسه را طوری انتخاب می‌کنیم که سکه‌ی برداشته‌شده بیشترین احتمال را برای طلا بودن داشته باشد. احتمال طلا بودن سکه‌ی برداشته‌شده چه قدر است؟

- (۱) $\frac{63}{224}$ (۲) $\frac{33}{112}$ (۳) $\frac{7}{28}$ (۴) $\frac{65}{224}$ (۵) $\frac{31}{112}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است. □

یک بازرگان ۱۰ کالا با شماره‌های ۱ تا ۱۰ در اختیار دارد که می‌خواهد بین دو فرزندش، فرهاد و بهرام، تقسیم کند. کالای با شماره‌ی i ، به اندازه‌ی i واحد ارزش دارد. بازرگان برای تقسیم کالاها به این صورت عمل می‌کند که در ابتدای هر مرحله، یکی از کالاهایی که پیشش باقی مانده است را به دلخواه انتخاب می‌کند و به فرهاد پیشنهاد می‌دهد. حال فرهاد می‌تواند این پیشنهاد را قبول یا رد کند:

- اگر فرهاد پیشنهاد بازرگان را رد کند، کالای پیشنهادشده به بهرام می‌رسد و پس از آن، بازرگان به دلخواه خود، یکی از کالاهای باقی مانده‌ی دیگر را به فرهاد می‌دهد.
- اگر فرهاد پیشنهاد بازرگان را قبول کند، کالای پیشنهادشده به فرهاد می‌رسد و پس از آن، بازرگان به دلخواه خود، یکی از کالاهای باقی مانده‌ی دیگر را به بهرام می‌دهد.

کالایی که بازرگان در ابتدا و انتهای هر مرحله انتخاب می‌کند به اتفاقات گذشته (از جمله تصمیم‌های فرهاد) بستگی دارد و از قبل مشخص نیست.

این فرایند در ۵ مرحله تکرار می‌شود تا در نهایت، ۵ کالا به فرهاد و ۵ کالا به بهرام برسد. هدف فرهاد این است که در انتها، مجموع ارزش کالاهای خودش بیشینه شود، در حالی که هدف بازرگان این است که مجموع ارزش کالاهای بهرام بیشینه شود. اگر هر دو بهینه عمل کنند، در انتها مجموع ارزش کالاهای فرهاد چه قدر خواهد بود؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۳ (۳) ۲۶ (۴) ۲۵ (۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است. □

به رشته‌ای از «(» و «)» که با افزودن تعداد دلخواهی «1» و «+» بتوان آن را به یک عبارت ریاضی صحیح تبدیل کرد، پرانتزگذاری معتبر می‌گوییم. چند پرانتزگذاری معتبر به طول ۱۰ وجود دارد که رشته‌ی «(())(())» به عنوان زیردنباله‌ای (نه لزوماً متوالی) در آن ظاهر می‌شود؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۰ (۴) ۲۷ (۵) ۲۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است. □

یک ردیف (دنباله) از جعبه‌های رنگی روی زمین قرار گرفته‌اند. هر رنگ با یک حرف انگلیسی نمایش داده می‌شود. سپیده می‌خواهد این جعبه‌ها را دور بریزد و برای این کار از یک روش خاص استفاده کند. در هر مرحله، او می‌تواند یک زیردنباله‌ی پیوسته از جعبه‌ها که همگی یک رنگ داشته باشند را انتخاب کند و آن‌ها را یک‌جا دور بریزد. سپس جعبه‌های باقی مانده (در دو طرف ناحیه‌ی حذف‌شده، در صورت وجود) به هم می‌چسبند و یک ردیف جدید تشکیل می‌دهند.

مثال: اگر دنباله‌ی جعبه‌ها به صورت RRGGR باشد، سپیده می‌تواند در مرحله‌ی اول، سه جعبه‌ی GGG را حذف کند. در این صورت، دنباله‌ی جعبه‌های باقی مانده به صورت RRR در می‌آید. پس او

مرحله‌ی دوم سی و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای (پاسخ‌نامه)

می‌تواند سه جعبه‌ی باقی مانده را نیز در مرحله‌ی بعد حذف کند. بنابراین می‌توان تمام این جعبه‌ها را مجموعاً در دو مرحله حذف نمود.

حال اگر دنباله‌ی جعبه‌ها به صورت زیر باشد، حداقل چند مرحله لازم است تا سپیده بتواند تمام جعبه‌ها را دور بریزد؟

RBBGRGGGYBGGYYGR

۷ (۵)

۸ (۴)

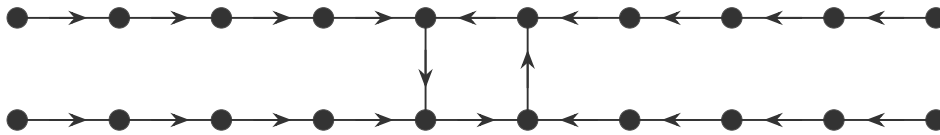
۹ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است. □

حادثه‌ای اتفاق افتاده است و پلیس به بیست نفر مظنون است. مظنونی که در ایجاد حادثه نقش داشته، مجرم شمرده می‌شود. پلیس از هر کدام از مظنون‌ها خواسته است که یک نفر را به عنوان مجرم معرفی کند. حاصل بازجویی‌ها به شکل گراف زیر است. در این گراف، هر رأس نشان‌دهنده‌ی یکی از مظنون‌ها است و اگر از رأس A به رأس B یال جهت‌دار وجود داشته باشد، یعنی مظنون A مظنون B را به عنوان مجرم معرفی کرده است.



می‌دانیم هر فرد مجرم حتماً دروغ می‌گوید، ولی هر یک از افراد بی‌گناه ممکن است راست بگوید یا دروغ بگوید. اکنون پلیس می‌خواهد بداند چند مجموعه‌ی مختلف از افراد مظنون ممکن است مجرم باشند. (ممکن است هیچ یک از افراد مظنون مجرم نباشند).

۱۴۳۶۶ (۵)

۴۰۹۶ (۴)

۲۳۹۳۶ (۳)

۱۷۵۳۶ (۲)

۲۸۵۶۱ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است. □

آوا و ترانه در حال انجام یک بازی هستند. بازی به این صورت است که ترانه تعدادی مهره با رنگ‌های متمایز دارد که آن‌ها را به یک ترتیب دلخواه در یک خط می‌چیند. به هر جایگشت از مهره‌ها یک چینش و به چینش ترانه چینش مخفی می‌گوییم. آوا مجموعه‌ی مهره‌های استفاده‌شده در چینش مخفی را می‌داند ولی جایگاه (ترتیب) آن‌ها را نمی‌داند و می‌خواهد چینش مخفی را به‌طور کامل کشف کند. آوا برای این کار، تعدادی چینش مختلف را انتخاب می‌کند و همه‌ی آن‌ها را به صورت یک‌جا به ترانه می‌دهد تا از او درباره‌ی هر یک از چینش‌ها بازخورد بگیرد. هدف آوا این است که با دادن کم‌ترین تعداد چینش به ترانه، بتواند به صورت قطعی چینش مخفی را پیدا کند. توجه کنید که ضرورتی ندارد چینش مخفی، یکی از چینش‌های ارائه‌شده توسط آوا باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

فرض کنید چینش مخفی از ۴ مهره تشکیل شده و ترانه به هر چینش ارائه‌شده توسط آوا، یکی از دو بازخورد زیر را می‌دهد:

- می‌گوید هیچ‌کدام از مهره‌ها در جای درست خود قرار ندارند.
 - یکی از مهره‌هایی که در جای درست خود قرار دارد را به دلخواه خود به آوا می‌گوید.
- آوا باید حداقل چند چینش به ترانه ارائه دهد تا مطمئن باشد همواره با گرفتن بازخورد آن‌ها از او، می‌تواند با قطعیت چینش مخفی را پیدا کند؟

۶ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵)

□ پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

فرض کنید چینش مخفی از ۳ مهره تشکیل شده و ترانه به هر چینش ارائه‌شده توسط آوا، یکی از دو بازخورد زیر را می‌دهد:

- می‌گوید تمام مهره‌ها در جای درست خود قرار دارند.
 - یکی از مهره‌هایی که در جای درست خود قرار ندارد را به دلخواه خود به آوا می‌گوید.
- آوا باید حداقل چند چینش به ترانه ارائه دهد تا مطمئن باشد همواره با گرفتن بازخورد آن‌ها از او، می‌تواند با قطعیت چینش مخفی را پیدا کند؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

□ پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.