



مرحله سوم سی و چهارمین دوره المپیاد کامپیوتر تیر ۱۴۰۳

سند اطلاعات

قبولی‌تان در مرحله دوم المپیاد کامپیوتر و ورودتان به مرحله سوم را تبریک می‌گوییم و به آزمون «جذاب» مرحله سوم خوش آمدید! این مرحله به منظور ارزیابی توانایی حل مسئله دانش‌پژوهان با بهره‌گیری از کامپیوتر است.

در این سند اطلاعاتی نظیر قوانین جلسه آزمون، نحوه کار با سیستم‌ها و سیستم داوری، و همچنین نکات اولیه برنامه‌نویسی که در طول آزمون به آن نیاز خواهید داشت بیان شده‌است. توصیه می‌شود قبل از شروع آزمون این سند را به طور کامل مطالعه نمایید چرا که بسیاری از سؤالات احتمالی شما در این سند پاسخ داده خواهد شد.

۱ سیستم داوری

داوری آزمون مرحله سوم به صورت خودکار صورت می‌گیرد. همه سؤالات به صورت خروجی محور^۱ سنجیده می‌شود. این به این معناست که به ازای هر سؤال تعدادی زیرمسئله در اختیارتان قرار داده شده‌است و به ازای هر زیرمسئله تنها باید یک فایل خروجی در سیستم داوری آپلود کنید.

از ارسال هر گونه کد به هر زبانی خودداری کنید و صرفاً یک فایل نوشتاری حاوی جواب آن زیرمسئله خودتان را ارسال کنید. حتی اگر کدتان درست باشد هم با ارسال آن نمره‌ای به شما تعلق نخواهد گرفت. از این رو، به ازای هر مسئله، باید کدی نوشته و کامپایل و روی ورودی‌های مربوطه اجرا کنید. سپس یک فایل خروجی نوشتاری از کد بگیرید یا صرفاً خروجی کد را در فایلی کپی کرده و برای سیستم داوری ارسال نمایید.

به ازای هر یک از شرکت‌کنندگان یک عدد صحیح اول تحت عنوان دلتا^۲ (Δ) اختصاص داده شده و از شما در هر سؤال خواسته شده تا خروجی‌تان را با توجه به دلتای مربوط به خودتان به دست بیاورید. برای مثال، در بسیاری از سؤالات که خروجی‌شان یک عدد است، خروجی را باید به پیمانه Δ خروجی دهید. برای دیدن دلتای خود به بخش Overview سامانه داوری مراجعه کنید و عدد خود را کپی کنید و در جایی به ازای همه سؤالات داشته باشید.

سیستم داوری‌ای که در پیش روی‌تان قرار می‌گیرد حاوی تعدادی سؤال است. هر سؤال یک بخش مربوط به ارسال‌ها^۳ و یک بخش حاوی صورت سؤالات^۴ است. در بخش صورت سؤال می‌توانید نسخه الکترونیکی سؤال مربوطه‌تان را ببینید و در بخش submissions می‌توانید جواب خود را به ازای هر زیرمسئله ارسال کنید و از نتیجه آن با خبر شوید.

یک نکته حائز اهمیت محدودیت تعداد ارسال است. توجه کنید که در کل به ازای هر سؤال می‌توانید حداکثر ۵۰ ارسال انجام دهید و بین هر دو ارسال متوالی باید حداقل ۱۰ ثانیه صبر کنید. از این جهت از ارسال فایل‌های تکراری که مطمئن هستید غلط هستند خودداری نمایید.

۲ کار با فایل

در سؤال‌های مرحله سوم المپیاد ممکن است لازم داشته باشید تا فایل‌هایی که در اختیارتان قرار گرفته است را بخوانید یا در فایل‌هایی بنویسید. برای انجام این کار در زبان ++C می‌توانید از دستور freopen یا ifstream و ofstream استفاده کنید. ساده‌ترین نحوه

Output Only^۱
Delta^۲
submissions^۳
Statement^۴

استفاده از `freopen` به صورت زیر است:

```
For reading: freopen("input_filename", "r", stdin);
For writing: freopen("output_filename", "w", stdout);
```

با زدن دستورات بالا، از این به بعد در صورت استفاده از دستور `cin` ورودی از فایل خوانده می شود و در صورت استفاده از دستور `cout` خروجی در فایل نوشته می شود. مطمئن شوید که اسم فایل ورودی یا خروجی دقیقاً مطابقت داشته باشد (یعنی فرمت فایل فراموش نشود).

روش دیگری نیز برای ورودی یا خروجی با فایل مبتنی بر `ifstream` و `ofstream` وجود دارد که به شما قابلیت ورودی گرفتن از چند فایل یا خروجی دادن در چند فایل را نیز می دهد. ساده ترین نحوه استفاده آن به صورت زیر است:

```
For reading: ifstream custom_stream_name("input_filename");
For writing: ofstream custom_stream_name("output_filename");
```

با مشخص کردن نام `custom_stream_name` می توانید از آن برای ورودی یا خروجی دقیقاً مشابه `cin` یا `cout` استفاده نمایید. برای مثال، کد زیر یک جدول $n \times m$ کاراکتر از ورودی در فایل `input.txt` می گیرد و تعداد `#` های آن را شمرده و در `output.txt` قرار می دهد.

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int maxn = 20;

char c[maxn][maxn];

int main() {
    freopen("input.txt", "r", stdin);
    freopen("output.txt", "w", stdout);
    int n, m, ans = 0;
    cin >> n >> m;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            cin >> c[i][j];
            if (c[i][j] == '#')
                ans++;
        }
    cout << ans << endl;
}
```

کد زیر نیز دو آرایه هم طول از دو ورودی `input1.txt` و `input2.txt` می گیرد و اختلاف هر عضو متناظر دو آرایه را حساب کرده و در خروجی قرار می دهد:

```
#include <iostream>
#include <fstream>
using namespace std;

const int maxn = 20;
int a[maxn], b[maxn];
```

```
int main() {
    ifstream fin1("input1.txt");
    ifstream fin2("input2.txt");
    int n;
    fin1 >> n;
    fin2 >> n;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        fin1 >> a[i];
        fin2 >> b[i];
    }
    ofstream fout("output.txt");
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        fout << a[i] - b[i] << ' ';
    }
    fout << endl;
}
```

نکات کار با فایل در ویندوز: در بسیاری از نسخه‌های ویندوز فرمت فایل‌ها قابل دیدن نیست و برای مثال اگر فایلی تحت عنوان "a.txt" تعریف کنید ممکن است به صورت "a.txt.txt" ذخیره شود. این موضوع هنگامی که قرار است اسم فایل‌ها دقیقاً مطابق با خود فایل باشد ممکن است مشکل‌ساز شود. اطمینان حاصل کنید که فایل اجرایی یا همان کدتان در همان فولدری باشد که فایل ورودی قرار گرفته است و با استفاده از منوی properties و بخش file type مطمئن شوید نام و فرمت فایل به درستی ذخیره شده‌است.

نکته‌ای در مورد ویرایشگر notepad: ویرایشگر notepad گاهی در خروجی‌دادن کاراکترهای تهی مانند whitespace یا newline ممکن است شما را به خطا بیندازد. برای مثال ممکن است فایلی که قرار است ۱۰۰ خط داشته باشد را باز کرده و ببینید تمام آن در یک خط یا کمتر از ۱۰۰ خط چاپ شده‌است. برای اینکه به صورت کامل فایل را ببینید می‌توانید از دستور filename type در صفحه cmd خود استفاده کنید.

نکته‌ای در مورد فایل خروجی: توجه کنید که برای ارسال خروجی لازم نیست حتماً آن را به صورت فایل در کد ایجاد کنید. می‌توانید صرفاً خروجی را کپی کرده و در فایل نوشتاری‌ای ذخیره کنید و آن را در سامانه داوری ارسال کنید.

۳ قوانین و چارچوب آزمون

به قوانین و چارچوب تعیین شده برای برگزاری آزمون توجه کنید و احترام بگذارید تا آزمون خوبی برای شما و سایر دانش‌پژوهان رقم بخورد. در صورت بروز هر گونه رفتار خارج از چارچوب تعیین شده برگزارکنندگان آزمون ناچار هستند طبق بخش‌نامه صادر شده عمل کنند.

- در صورت بروز هر گونه مشکل فنی در سیستم‌تان یا در صورتی که حس می‌کنید سؤالی مشکل دارد می‌توانید از سیستم درخواست برای شفاف‌سازی آنلاین^۵ در سیستم داوری استفاده کنید، برای این‌کار به بخش Communications مراجعه نموده و درخواست خود را بنویسید. تیم فنی آزمون در اسرع وقت پاسخگوی شما خواهد بود.

^۵Request for Clarification

- به اعلان^۶ هایی که در طول آزمون مسئولین برگزاری ارسال می کنند و در صفحه شما ظاهر می شود توجه نمایید. این اعلان ها حاوی اطلاعاتی است خواهد بود که سؤال پرتکرار بسیاری بوده است.
- در سیستم آنلاین پاسخگویی و شفاف سازی، هر گونه سؤال که حاوی محتوای نامربوط باشد و در جهت شفاف سازی یا رفع ایراد فنی نباشد پاسخ های خودکار مانند no comment دریافت خواهد کرد.
- در صورتیکه سیستم شما دچار مشکل شد و با چند بار ریفرش کردن صفحه مشکل مرتفع نشد، از یکی از مراقبین درخواست کمک کنید. از فشردن دکمه ریفرش به صورت پشت سر هم خودداری کنید.
- هر فرد به صورت یکتا به یک کامپیوتر در سایت اختصاص داده شده است. در طول آزمون تا پایان برگزاری آن مجاز به خروج از محوطه آزمون و بلند شدن از پای سیستم های خود نیستید. این به این معناست که:
 - در صورتیکه آزمون را زودتر از موعد تمام کردید باید تا پایان آزمون پشت سیستم خود باقی بمانید.
 - نمی توانید کامپیوتر، مانیتور، یا کیبورد خود را با سایر دانش پژوهان حاضر در آزمون معاوضه کنید! در صورتیکه هر یک از اقلام ذکر شده دچار مشکل بود، از مراقبین درخواست کمک نمایید.
- اگر به هردلیلی خواستید از سر جای خود بلند شوید لطفاً دست خود را بالا گرفته و منتظر بمانید یکی از مراقبان یا برگزارکنندگان به شما کمک کنند.
- در صورت تشخیص هر گونه رفتاری که نشان دهنده عدم صداقت در آزمون باشد، دانش پژوه از شرکت در المپیاد چه امسال و چه سال های بعد محروم خواهد شد.

موفق باشید!



مرحله‌ی سوم سی و چهارمین دوره المپیاد کامپیوتر ۱۸ تیر ۱۴۰۳ - آزمون روز دوم

Inflation

تورم

مهاجر که مهاجری با بودجه‌ی اولیه‌ی n میلیارد تومان است به ایران مهاجرت کرده و قصد دارد به مدت n سال در ایران بماند. او می‌خواهد تا جای ممکن خانه بخرد تا سرمایه‌ای مطمئن داشته باشد و بتواند تا حد خوبی از سیستم مالیاتی کشور فرار کند! به دلیل تورم موجود در کشور در نتیجه‌ی تحریم‌های خارجی، قیمت خانه در سال i ام، i میلیارد تومان است. مهاجر در هر سال می‌تواند یا دقیقاً یک خانه بخرد (خرید بیشتر می‌تواند به معنای احتکار ترقی شود و باعث دستگیری او شود) و موجودی‌اش به اندازه‌ی قیمت خانه در آن سال کم شود (منطقاً موجودی او نمی‌تواند منفی شود)، و یا کاری نکند که در این صورت می‌تواند در این سال بدون قسط و بدهی با تمرکز کامل کار کند و موجودی‌اش دوباره به n میلیارد تومان برسد.



مهاجر $f(n)$ را اینگونه تعریف می‌کند که اگر موجودی اولیه‌ی او برابر با n باشد و از سال‌های 1 تا n در ایران باشد، حداکثر چند خانه می‌تواند بخرد. برای مثال مقدار $f(5) = 3$ می‌باشد؛ مهاجر می‌تواند در سال‌های دوم و سوم خانه بخرد و موجودی‌اش 0 شود. در سال چهارم کاری نکند تا موجودی‌اش دوباره 5 شود و در نهایت در سال پنجم (آخر) یک خانه‌ی دیگر بخرد. همچنین می‌توان نشان داد که مهاجر نمی‌تواند 4 خانه بخرد و این مقدار بیشینه است.

زیرمسئله‌ها

• بخش اول (۳۲ نمره)

مقدار $f(100)^{10}$ به پیمانه‌ی Δ را چاپ کنید.

پاسخ شما:

• بخش دوم (۳۱ نمره)

مقدار $f(14031403)^{10}$ به پیمانه‌ی Δ را چاپ کنید.

پاسخ شما:

• بخش سوم (۳۷ نمره)

مقدار $f(1403140314031403)^{10}$ به پیمانه‌ی Δ را چاپ کنید.

پاسخ شما:



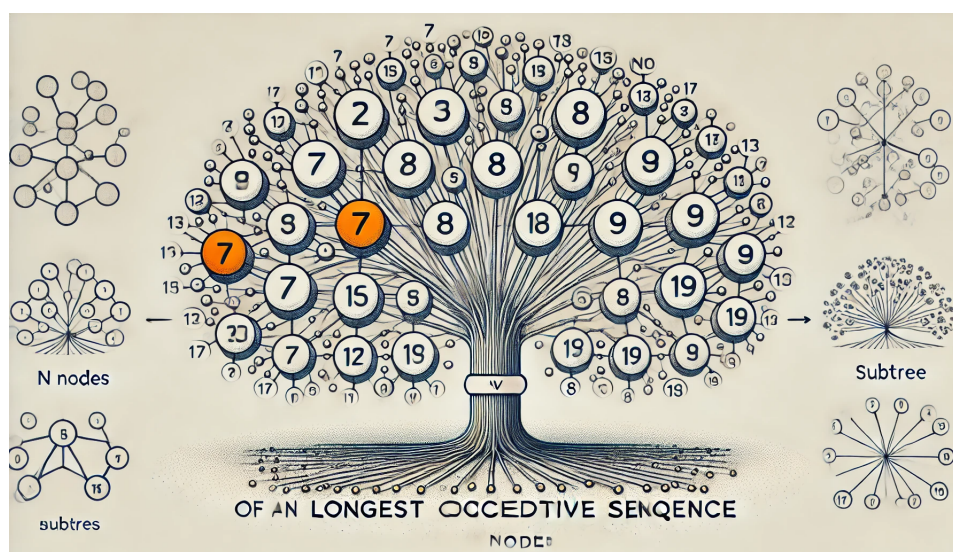
مرحله‌ی سوم سی و چهارمین دوره المپیاد کامپیوتر ۱۸ تیر ۱۴۰۳ - آزمون روز دوم

Continuous Subtree

درخت معبد

موبدِ معبدِ شاتولین جدیداً به درخت‌ها علاقه‌ی عجیبی پیدا کرده است و میزان قداست زیادی در خلقت آن‌ها احساس می‌کند. او به تازگی با امیرِ دربارِ سلطنتی آشنا شده و گاهی اوقات با یک‌دیگر به عبادت می‌پردازند. او از طریق شکرالله (سلطان دانشمندانِ دربارِ امیر)، با گراف‌ها و مفهوم درخت^۱ در آن‌ها آشنا شده و بسیار از این تعریف در علم گراف خوشش آمده است.

او برای دستگرمی ابتدا به کمک سرداد (سلطان دانشمندانِ دربارِ امیر) یک درخت n راسی ریشه‌دار T با رئوس ۱ تا n می‌کشد (راس ۱ ریشه است) و سپس این درخت را به امیر می‌دهد تا شماره‌گذاری رئوس آن را به ترتیب دلخواه خود جابجا کند. از آنجایی که شکرالله به اعداد طبیعی متوالی علاقه‌ی زیادی دارد برای هر راس v در درخت T ، عددی به نام f_v تعریف می‌کند که برابر با «طول بلندترین بازه‌ی متوالی از اعداد طبیعی موجود در زیردرخت v » است؛ به طور مثال اگر مجموعه اعداد نسبت داده شده به رئوس داخل زیردرخت راس $v = 2$ برابر $\{1, 2, 7, 8, 9, 11\}$ باشد $f_v = 3$ خواهد بود. زیرا ۷ و ۸ و ۹ متوالی هستند. دقت کنید که عدد راس v نیز در این مجموعه حساب می‌شود و همچنین جایگاه این اعداد در زیردرخت اهمیتی ندارد و تنها حضور یا عدم حضورشان در این زیردرخت مهم است.



شکرالله برای به چالش کشیدن موبد و امیر مسئله‌ی زیر را برای آن‌ها مطرح می‌کند؛ او به ازای هر $n!$ حالت شماره‌دهی امیر به رئوس درخت T یک عدد به درخت حاصل نسبت می‌دهد که برابر با جمع تمام مقادیر f به ازای n راس درخت حاصل است. سپس این اعداد را باهم جمع می‌زند و اسم آن را $g(T)$ می‌گذارد. با گرفتن درخت T به موبد و امیر برای حساب کردن مقدار $g(T)$ کمک کنید!

^۱ به گرافی که بین هر دو راس دلخواهی در آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد درخت می‌گویند.

زیرمسئله‌ها

• بخش اول (۳۱ نمره)

اگر در درخت T مقدار $n = 5$ و پدر راس i ($2 \leq i \leq n$) برابر با $i - 1$ باشد (یک مسیر 5 راسی)، حاصل $g(T)^{10}$ به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش دوم (۳۴ نمره)

اگر در درخت T مقدار $n = 500$ و پدر راس i ($2 \leq i \leq n$) برابر با $i - 1$ باشد (یک مسیر 500 راسی)، حاصل $g(T)^{10}$ به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش سوم (۳۵ نمره)

اگر در درخت T مقدار $n = 2^{20} - 1$ و پدر راس i ($2 \leq i \leq n$) برابر با $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ باشد (یک درخت دودویی کامل^۲ و متوازن^۳ $2^{20} - 1$ راسی)، حاصل $g(T)^{10}$ به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

^۲درخت دودویی کامل: درختی که تعداد بچه‌های هر راس در آن دقیقاً برابر یکی از اعداد 0 یا 2 است.
^۳درخت دودویی متوازن: درخت دودویی n راسی که ارتفاع آن برابر با $\lfloor \log n \rfloor$ است.



مرحله‌ی سوم سی و چهارمین دوره المپیاد کامپیوتر ۱۸ تیر ۱۴۰۳ - آزمون روز دوم

GCD-LCM

ترک محفل

سلتی یکی از معدود مشاوران استاد سرداد است که یکی از ریاضی‌دانان برتر جهان است! از آن‌جا که استاد سرداد کمی پیر شده و سلتی استعداد فراوانی در زمینه‌ی نظریه اعداد دارد، در بسیاری از مسائلی که استاد در تلاش به حل آن‌ها است به او کمک می‌کند. هرچند که ذهن او به پختگی استاد سرداد نیست و از این‌رو بسیاری از مواقع بر سر درستی اثبات‌های مسائلشان به سر و کله‌ی هم می‌پرنند. در آخرین دعوایشان، سلتی و استاد سرداد اینگونه باهم به بحث پرداختند و سپس سلتی محفل استاد را به قصد پیدا کردن اثبات قابل قبولی برای مسئله‌ی خود ترک کرد:

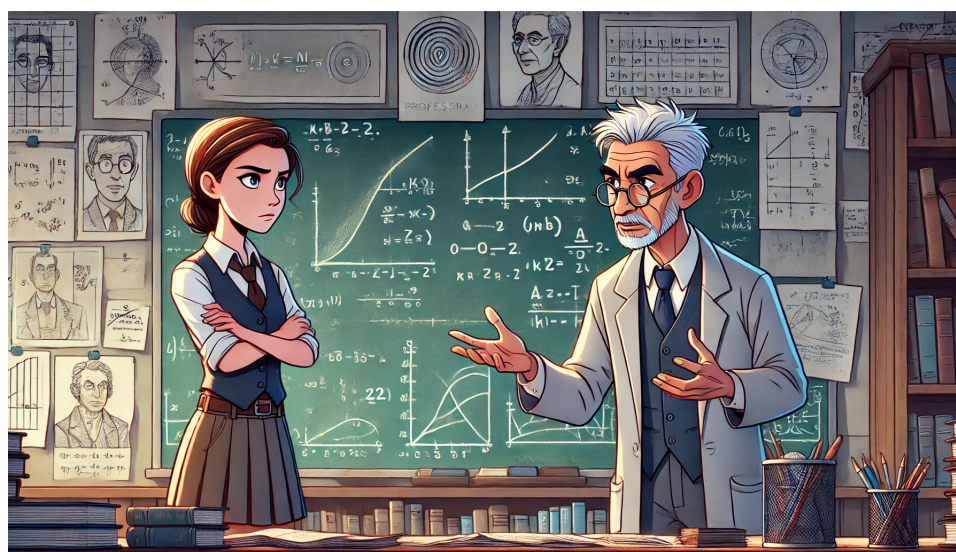
سلتی: اگر راست می‌گویی مثال نقضی برای این راه من ارائه بده!

سرداد: عدم ارائه‌ی مثال نقض توسط من به معنای درستی اثبات تو نیست. در برابر حقیقت مقاومت نکن.

سلتی: تو ذهنت کند و فرسوده است. این راه حل واضح است که جواب می‌دهد.

سرداد: تنها چیز واضح در این دنیا، اثبات‌های ریاضی است. نگذار غرور و تعصب جلوی منطق تو را بگیرد. این پند را جدی بگیر.

سلتی: بالاخره متوجه می‌شوی؛ اوایلر باید کمی به تو درباره‌ی ادراک قوی ریاضی‌دانان نیز آموزش می‌داد...



مسئله‌ای که سر آن به بحث و جدل پرداختند بدین شکل است؛ یک آرایه به طول n داریم که عضو i ام آن برابر با a_i است. سلتی در هر مرحله می‌تواند دو عضو دلخواه از این آرایه را انتخاب کند تا استاد سرداد جای یکی از آن‌ها بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک بینشان، و جای دیگری کوچک‌ترین مضرب مشترک بینشان را بنویسد. هدف آن‌ها حدس بیشینه‌ی جمع کل اعدادی آرایه بعد از تعداد دلخواهی عملیات با توجه آرایه‌ی اولیه است. سلتی پاسخ مسئله را نمی‌داند و با حدس‌های غلط خود سعی بر راضی کردن استاد سرداد دارد. از این‌رو از شما خواسته است که این مقدار را به ازای آرایه‌های ارائه شده محاسبه کنید.

زیرمسئله‌ها

• بخش اول (۹ نمره)

اگر پاسخ مسئله به ازای $n = 10$ و آرایه‌ی اولیه‌ی $a_i = 2i - 1$ برابر x باشد، حاصل x^3 به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش دوم (۱۲ نمره)

اگر پاسخ مسئله به ازای $n = 40$ و آرایه‌ی اولیه‌ی $a_i = i$ برابر x باشد، حاصل x^2 به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش سوم (۲۶ نمره)

اگر پاسخ مسئله به ازای $n = 11^3 = 1331$ و $a = \{2^i \times 3^j \times 5^k \mid 0 \leq i, j, k \leq 10\}$ برابر x باشد، حاصل $x^2 + x + 1$ به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش چهارم (۳۶ نمره)

اگر پاسخ مسئله به ازای $n = 10^6$ و $a_i = i$ برابر x باشد، حاصل x^Δ به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش پنجم (۱۷ نمره)

اگر پاسخ مسئله به ازای $n = 10^{18}$ و $a_i = i$ برابر x باشد، حاصل x به پیمانه‌ی Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما: