مسئله‌ی یک: گراف خیام‌ـ‌پاسکال .... ۲۲ نمره

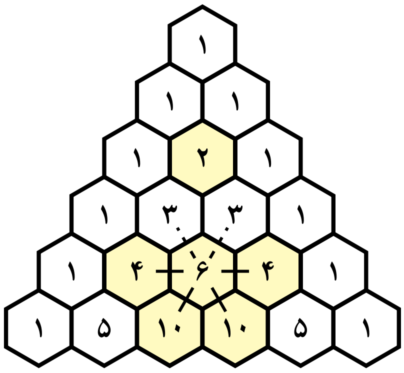
گراف خیام‌ـ‌پاسکال از روی مثلث خیام‌ـ‌پاسکال به صورت زیر ساخته می‌شود. به ازای هر خانه از مثلث خیام‌ـ‌پاسکال مانند $\binom{n}{k}$ ، یک راس در گراف در نظر گرفته می‌شود. دو راس $\binom{n_1}{k_1}$ و $\binom{n_2}{k_2}$ به یکدیگر متصل هستند، اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

- $n_1 = n_2, |k_1 - k_2| = 1$
- $n_2 = n_1 + 1, k_1 \leq k_2 \leq k_1 + 1$
- $n_1 = n_2 + 1, k_2 \leq k_1 \leq k_2 + 1$

در این صورت هر راس، حداکثر ۶ همسایه خواهد داشت.

گراف $G(R)$، شامل تمامی راس‌هایی مانند $\binom{n}{k}$ است که مقدار $\binom{n}{k}$ زوج و $n < R$ است. دو راس در $G(R)$ به یکدیگر متصل هستند اگر و فقط اگر در گراف خیام‌ـ‌پاسکال به یکدیگر متصل باشند.

شکل زیر ۶ سطر اول مثلث خیام‌ـ‌پاسکال را نشان می‌دهد. راس‌های گراف $G(6)$ در این شکل، با پس‌زمینه‌ی رنگی مشخص شده‌اند. یال‌های متصل به راس $\binom{4}{2}$ نیز در گراف مشخص شده‌اند. یال‌هایی که در گراف $G(6)$ هستند، با خط ممتد و یال‌های خارج از آن، با خط‌چین نمایش داده شده‌اند.



۱ـ **الف (۱۱ نمره)** : اگر X نشان‌دهنده‌ی تعداد مولفه‌های همبندی گراف $G(2^{20})$ باشد، باقی‌مانده‌ی X^2 بر Δ چند است؟

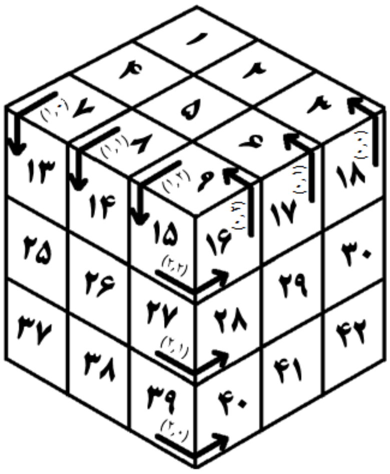
پاسخ شما: ....

۱ـ **ب (۱۱ نمره)** : اگر X نشان‌دهنده‌ی تعداد مولفه‌های همبندی گراف $G(1020304050)$ باشد، باقی‌مانده‌ی X^2 بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

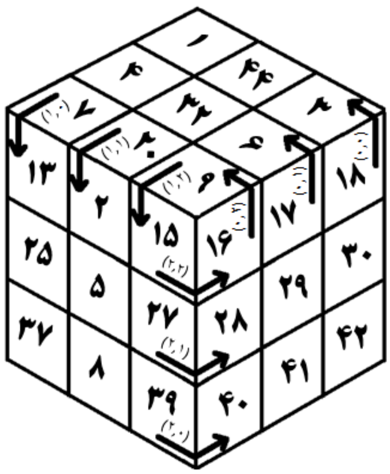
مسئله‌ی دو: روبیک اعداد .... ۳۸ نمره

هوشنگ که از خوره‌های روبیک است، جدیدا با «روبیک اعداد» آشنا شده است. تنها تفاوت روبیک اعداد با روبیک عادی این است که خانه‌هایش به جای رنگ، با اعداد پر شده‌اند. یک نمونه از روبیک اعداد و هم‌چنین حالت باز شده‌ی آن در زیر آمده است.



			۱	۲	۳						
			۴	۵	۶						
			۷	۸	۹						
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱
۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳
۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵
			۴۶	۴۷	۴۸						
			۴۹	۵۰	۵۱						
			۵۲	۵۳	۵۴						

در حالت باز شده، خانه‌های ۵، ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۳۲ و ۵۰ به ترتیب خانه‌های مرکزی وجه‌های بالا، چپ، جلو، راست، عقب و پایین مکعب هستند. همان‌طور که در شکل بالا نیز مشخص شده است، ۹ حرکت بر روی این مکعب مجاز است که هر کدام از حرکات یکی از لایه‌های مکعب را در جهت مشخص شده روی شکل، ۹۰ درجه می‌چرخاند. حرکات با یک جفت از اعداد مانند (a,b) $(۰ \le a,b \le ۲)$ مشخص شده‌اند. برای مثال اگر یکبار حرکت $(۱,۱)$ انجام شود، وضعیت زیر بدست می‌آید.



ارزش یک وضعیت از روبیک اعداد با فرمول $\sum_{i=۱}^{۵۴}(i-p_i)^۴$ مشخص می‌شود که p_i نشان‌دهنده‌ی عددی است که بر روی خانه‌ی i نوشته شده است. برای مثال در حالت اولیه، به ازای تمامی iها، $p_i = i$ است. **دقت کنید که حق چرخاندن روبیک در فضا را نداریم و تنها می‌توانیم لایه‌ها را با همان جهتی که مشخص شده، بچرخانیم.**

هوشنگ از شما خواسته است که با شروع از حالت اولیه، دنباله‌ای از حرکات را که در سوالات زیر شرح داده شده‌اند، انجام دهید و سپس ارزش وضعیت نهایی بعد از انجام حرکات را حساب کنید. برای ساختن دنباله‌ی

حرکات، از تابع $d(i)$ استفاده می‌شود. تابع $d(i)$ برابر با باقی‌مانده‌ی تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد i بر ۳ است.

۱ـ الف (۱۰ نمره) : اگر ۱۰۰ حرکت انجام دهیم و حرکت i ام برابر $(۰, d(i))$ باشد، باقی‌مانده‌ی ارزش وضعیت نهایی بر ۵ چند است؟

پاسخ شما: ....

۱ـ ب (۱۲ نمره) : اگر ۱۰۰ حرکت انجام دهیم و حرکت i ام برابر $(d(i), ۱)$ باشد، باقی‌مانده‌ی ارزش وضعیت نهایی بر ۵ چند است؟

پاسخ شما: ....

۱ـ ج (۱۶ نمره) : اگر ۱۰۰۰۰ حرکت انجام دهیم و حرکت i ام برابر $(d(۲i), d(۲i + ۱))$ باشد، باقی‌مانده‌ی ارزش وضعیت نهایی بر ۵ چند است؟

پاسخ شما: ....

مسئله‌ی سه: نشاندن جایگشت‌ها .... ۴۰ نمره

هوشنگ مدت‌ها است که بر روی جایگشت‌ها مطالعه می‌کند و به تازگی مفهوم **نشاندن جایگشت‌ها** را مطرح کرده که غوغایی بین جامعه جایگشت‌شناسان برپا کرده است.

بنا بر تعریف هوشنگ ، جایگشت p، جایگشت q را می‌نشاند اگر دنباله‌ای از حرکات **بشین سر جات** وجود داشته باشد (طول این دنباله از حرکات می‌تواند صفر باشد) که جایگشت p را به q تبدیل کند. حرکت **بشین سر جات i** بر روی جایگشت $\langle p_۱, p_۲, \ldots, p_n \rangle$ اگر $p_i \neq i$ باشد، عضو i ام و p_i ام جایگشت را با یکدیگر جابه‌جا می‌کند و در غیر این صورت جایگشت را تغییر نمی‌دهد. در زیر یکی از دنباله‌هایی که جایگشت $\langle ۳, ۱, ۴, ۵, ۲ \rangle$ را به $\langle ۱, ۲, ۴, ۳, ۵ \rangle$ تبدیل می‌کند، آمده است.

$$\langle ۳, ۱, ۴, ۵, ۲ \rangle \xrightarrow{\text{ب.س.ج ۵}} \langle ۳, ۲, ۴, ۵, ۱ \rangle \xrightarrow{\text{ب.س.ج ۴}} \langle ۳, ۲, ۴, ۱, ۵ \rangle \xrightarrow{\text{ب.س.ج ۴}} \langle ۱, ۲, ۴, ۳, ۵ \rangle$$

۱ــ الف (۱۴ نمره) : اگر تعداد جایگشت‌هایی را که جایگشت $\langle ۲, ۳, ۵, ۹, ۸, ۷, ۱۰, ۱, ۴, ۶ \rangle$ می‌نشاند، x در نظر بگیریم. باقی مانده‌ی $x^۴$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

۱ــ ب (۱۰ نمره) : اگر به ازای هر جایگشت با طول ۱۰، تعداد جایگشت‌هایی که می‌نشاند را حساب کرده و این اعداد را با هم جمع کنیم، باقی‌مانده‌ی این مجموع بر Δ چند خواهد بود؟

پاسخ شما: ....

۱ــ ج (۱۶ نمره) : اگر به ازای هر جایگشت با طول ۱۰۰، تعداد جایگشت‌هایی که می‌نشاند را حساب کرده و این اعداد را با هم جمع کنیم، باقی‌مانده‌ی این مجموع بر Δ چند خواهد بود؟

پاسخ شما: ....