

به نام خدا

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری سوم

وقت: ۵ ساعت

پنج‌شنبه ۸ شهریور ۱۴۰۳

توجه کنید که ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.

مسئله‌ی یکم ۱۰۰ امتیاز

یک درخت n رأسی داریم که رئوس آن با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. تعداد زیردرخت‌های القایی این درخت حداکثر $10n^2$ است. ثابت کنید قطر آن $\Omega(n)$ است. منظور از زیردرخت القایی، یک زیرمجموعه‌ی همبند از رئوس درخت است و دو زیر درخت متفاوتند اگر مجموعه رئوس متفاوتی داشته باشند.

مسئله‌ی دوم ۱۰۰ امتیاز

حسین و محیا در حال بازی کردن هستند. حسین یک جعبه دارد که در آن ۱۴۰۳ توپ قرمز و ۱۴۰۳ توپ آبی قرار دارد. محیا ۱۰۰۰ تومان پول دارد. آن‌ها تا زمانی که حداقل یک توپ در جعبه باقی مانده، بازی زیر را انجام می‌دهند.

در هر مرحله محیا یک مقدار حقیقی از پول‌هایش را به حسین می‌دهد و یکی از رنگ‌ها را انتخاب می‌کند؛ سپس حسین یکی از توپ‌ها را به‌طور کاملاً اتفاقی از جعبه خارج می‌کند. در صورتی که رنگ توپ خارج‌شده با انتخاب محیا یکی باشد، حسین دو برابر پول‌های دریافت‌شده را به محیا برمی‌گرداند. در غیر این صورت حسین هیچ پولی را برنمی‌گرداند.

امید ریاضی بیشترین سودی که محیا می‌تواند از این بازی کسب کند را محاسبه کنید.

مسئله‌ی سوم ۱۰۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ داریم که خانه‌هایش با اعداد ۰ و ۱ پر شده‌اند. پرهام در هر مرحله عملیات زیر را که شامل ۳ گام است، انجام می‌دهد:

۱. قطر پراکنده‌ای دلخواه از جدول در نظر می‌گیرد و اعدادش از سطر ۱ ام تا سطر n ام را به ترتیب از چپ به راست می‌نویسد و دنباله p را تشکیل می‌دهد. فرض کنید i_p برابر تعداد نابجایی‌های این دنباله باشد.

۲. دنباله p را به تعداد بار دلخواه به سمت راست دوران می‌دهد تا دنباله q حاصل شود. فرض کنید تعداد نابجایی‌های دنباله q برابر i_q باشد.

۳. در صورتی که $i_q < i_p$ باشد، پرهام اعداد قطر پراکنده انتخاب شده را از سطر ۱ ام تا سطر n ام با اعداد دنباله q (به ترتیب از چپ به راست) جایگزین می‌کند. در غیر این صورت، پروسه متوقف می‌شود.

ثابت کنید پس از متناهی مرحله، پرهام دیگر نمی‌تواند عملیات بالا را انجام دهد.

و خدا خواست که یعقوب بنیدیک عمر

شهرنی‌یارگر ارزش دیدن دارد؟