

به نام خدا

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری دوم

وقت: ۵ ساعت

دوشنبه ۵ شهریور ۱۴۰۳

توجه کنید که ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.

مسئله‌ی یکم امتیاز ۱۰۰

n خودپرداز به شماره‌های ۱ تا n داریم که مجموعاً ۱۰۰۰ تومان در آن‌ها پول است. موجودی هر خودپرداز می‌تواند یک عدد حقیقی باشد و موجودی خودپرداز شماره i ($1 < i \leq n$) بیشتر مساوی موجودی خودپرداز شماره $i-1$ است. حسین می‌خواهد از خودپردازها پول برداشت کند. او در ابتدا به ازای هر خودپرداز یک عدد حقیقی روی کاغذ یادداشت می‌کند که نشان‌دهنده مقدار پولی است که می‌خواهد از آن خودپرداز برداشت کند و سپس سراغ خودپردازها می‌رود. اگر موجودی هر خودپرداز بیشتر مساوی میزانی که روی کاغذ برای آن نوشته شده بود باشد، حسین می‌تواند آن میزان را برداشت کند و در غیر اینصورت، هیچ پولی از آن خودپرداز دریافت نمی‌کند.

۱. اگر $n=3$ باشد، آنگاه حداکثر پولی که حسین می‌تواند برداشت کند چه قدر است؟ (۵۰ امتیاز)
۲. اگر $n \geq 6$ باشد، آنگاه روشی ارائه دهید که حسین بتواند حداقل $\frac{1500}{n}$ تومان برداشت کند. (۵۰ امتیاز)

مسئله‌ی دوم امتیاز ۱۰۰

یک درخت n راسی و ریشه‌دار T داریم که رئوس آن به ترتیب از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. علی می‌خواهد تعدادی دنباله از اعداد روی یک تخته بنویسد. در ابتدا n دنباله تک عضوی که هر کدام شامل یکی از رئوس درخت هستند روی تخته نوشته شده‌است. علی در هر مرحله یکی از دنباله‌های روی تخته را به دلخواه انتخاب کرده و از روی آن یک دنباله جدید ساخته و به تخته اضافه می‌کند.

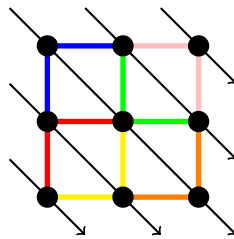
فرض کنید $size_v$ برابر با تعداد رئوس زیر درخت با ریشه v باشد، و دنباله فرزندان مستقیم رأس v را به شکل مرتب شده با C_v نشان دهیم.

- اگر دنباله انتخاب شده توسط علی $v_1, v_2, \dots, v_k$ باشد، آنگاه دنباله جدید به شکل زیر تعریف می‌شود:
- اگر $size_{v_1} \geq size_{v_k}$ باشد آنگاه دنباله جدید برابر است با $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, C_{v_k}$. برای توضیح بیشتر، دنباله C_{v_k} به انتهای دنباله $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ ادغام می‌شود.

- در غیر این صورت دنباله جدید برابر است با $C_{v_1}, v_2, \dots, v_k$.
- اگر پس از یک مرحله دنباله تکراری به تخته اضافه شود، علی پروسه را متوقف می‌کند. ثابت کنید علی با هر روشی دنباله‌ها را اضافه کند، حداکثر $O(n \log n)$ دنباله به تخته اضافه می‌شود.
- در صورتی که نشان دهید تعداد دنباله‌ها حداکثر $O(n^2)$ است، می‌توانید ۳۰ امتیاز دریافت کنید.

مسئله‌ی سوم ۱۰۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ داریم که پاره‌خط‌های واحد آن به الگوهای L (و دوران‌های آن) افزاشده‌اند. یک خط که موازی قطر اصلی جدول باشد و رئوس جدول را قطع کند را خط قطری می‌نامیم. میدانیم که تعدادی از الگوها توسط این خط از وسط قطع شده‌اند. اگر در راستای بالا چپ به پایین راست به این خط نگاه کنیم، هر الگوی نصف شده یا نمایانگر یک پرانتز باز است یا نمایانگر یک پرانتز بسته. رشته‌ی این پرانتزها را «پرانتز گذاری» متناظر با این خط می‌نامیم. برای مثال، قطر اصلی در جدول زیر الگوهای آبی و نارنجی را از وسط قطع کرده و پرانتزگذاری متناظر با آن برابر است با (). به یک پرانتز گذاری «معتبر» می‌گوییم اگر برای هر پرانتز باز بتوان یک پرانتز بسته متناظر کرد به طوری که رشته بین این دو پرانتز تشکیل یک پرانتزگذاری معتبر دهد و با حذف این بازه رشته باقی‌مانده پرانتزگذاری معتبر باشد.



۱. ثابت کنید در پرانتزگذاری متناظر با هر خط قطری، تعداد برابری پرانتز باز و بسته وجود دارد. (۵۰ امتیاز)
۲. ثابت کنید پرانتزگذاری متناظر با هر خط قطری، تشکیل یک پرانتزگذاری معتبر می‌دهند. (۵۰ امتیاز)

فرصت، چون ابر می‌گذرد. پس، فرصت‌های کار خوب را غنیمت شمرید.

نام علی (ع)