

مسئله‌ی ۱ (۱۰۰ نمره)

به یک زیرمجموعه از رئوس یک گراف، «زیبا» می‌گوییم هرگاه زیرگراف القایی آن، مسیر همیلتونی داشته باشد.

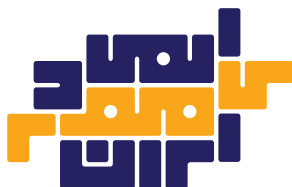
همچنین یک گراف ساده را « d -شبه‌منتظم» می‌نامیم اگر درجه‌ی هر رأس آن برابر d یا $d - ۱$ باشد.

حداقل k ای را بیابید که بتوان رئوس هر گراف d -شبه‌منتظم ($d \geq ۲$) را به زیرمجموعه‌های زیبای حداقل ۲ عضوی و حداکثر k عضوی افراز کرد.

توجه: برای دریافت امتیاز کامل این سؤال، باید:

۱. به ازای هر d ، گرافی d -شبه‌منتظم بسازید که نتوان رئوس آن را به زیرمجموعه‌های زیبای حداقل ۲ عضوی و حداکثر $(k - ۱)$ عضوی افراز کرد.

۲. ثابت کنید رئوس هر گراف d -شبه‌منتظم را می‌توان به زیرمجموعه‌های زیبای حداقل ۲ عضوی و حداکثر k عضوی افراز کرد.



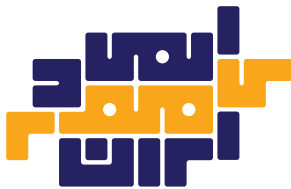
مسئله‌ی ۲ (۱۰۰ نمره)

n ماشین در یک مسابقه شرکت می‌کنند. هر ماشین دارای یک سرعت ثابت بیشتر از صفر است و در طول مسابقه هیچ تغییری در سرعت آن‌ها رخ نمی‌دهد. در ابتدا، مکان شروع ماشین‌ها متفاوت است. با توجه به جایگاه ماشین‌ها، یک درخت ریشه‌دار n رأسی ساخته‌ایم که روی هر رأس آن شماره‌ی یکی از ماشین‌ها را نوشته‌ایم و شماره‌ی هر ماشین روی دقیقاً یکی از رئوس نوشته شده‌است. در ابتدا به ازای هر کدام از رئوس درخت (به جز ریشه)، می‌دانیم مکان ماشین متناظر این رأس از مکان ماشین متناظر رأس پدرش عقب‌تر است.

پس از شروع مسابقه، هر گاه یکی از ماشین‌ها از ماشین متناظر با رأس پدرش در درخت سبقت گرفت، شماره‌ی این دو رأس درخت را با هم جابه‌جا می‌کنیم. فرض کنید سرعت‌ها و مکان‌های اولیه‌ی ماشین‌ها چنان‌اند که هیچ دو سبقتی هم‌زمان رخ نمی‌دهند؛ یعنی در هر لحظه حداکثر یک عملیات جابه‌جایی انجام می‌شود. با فرض اینکه مسابقه تا ابد ادامه دارد:

الف) اگر درخت یک ستاره با مرکز ریشه باشد (یعنی ارتفاع درخت برابر با ۱ باشد)، نشان دهید تعداد عملیات جابه‌جایی رئوس حداکثر برابر با $n - 1$ است. (۱۰ امتیاز)

ب) اگر ارتفاع درخت از $O(\log n)$ باشد، نشان دهید تعداد عملیات جابه‌جایی رئوس حداکثر از $O(n \log n)$ است. (۹۰ امتیاز)



مسئله‌ی ۳ (۱۰۰ نمره)

n نفر ($n \geq 3$) در نقاطی متمایز روی محیط یک دایره ایستاده‌اند. فاصله‌ی بین هر دو نفر، برابر با طول کمان کوچک‌تر بین آن دو روی محیط دایره تعریف می‌شود. تضمین می‌شود که تمام $\binom{n}{2}$ فاصله‌ی موجود متمایزند؛ در نتیجه، اگر برای هر فرد مانند u ، سایر $n - 1$ نفر را بر اساس فاصله‌شان از u (از نزدیک‌ترین به دورترین) مرتب کنیم، به یک رتبه‌بندی یکتا می‌رسیم.

می‌خواهیم چیدمان این n نفر روی دایره را پیدا کنیم. برای این کار، به یک ماشین پاسخ‌گو دسترسی داریم که می‌تواند به دو نوع پرس‌وجوی زیر پاسخ دهد:

- پرس‌وجوی رتبه $\text{Rank}(u, v)$: جایگاه فرد v را در لیست مرتب‌شده‌ی افراد بر اساس فاصله از u مشخص می‌کند، یعنی می‌گوید v چندمین فرد نزدیک به u است.
- پرس‌وجوی انتخاب $\text{Select}(u, k)$: برای عدد طبیعی k ($1 \leq k \leq n - 1$)، k امین فرد نزدیک به فرد u را برمی‌گرداند.

از آن‌جا که تمام اطلاعات دریافتی از ماشین بر اساس فواصل بدون جهت است، کافی است تشخیص دهیم در آرایش اصلی افراد مجاور هر شخص چه کسانی هستند.

فرض کنید Q_n کمینه‌ی تعداد کل پرس‌وجوها (از هر دو نوع، روی هم) باشد که در بدترین حالت میان همه‌ی آرایش‌های ممکن، برای بازیابی این چیدمان کافی است. نشان دهید:

الف) $Q_n \leq 3n$ (۵۰ امتیاز)

ب) $Q_n \leq \lfloor \frac{5n}{4} \rfloor$ (۵۰ امتیاز)

هیچ تجربه و آزمونی را نمی‌توان دلیل اعتبار گرفت.

آندره موروا