

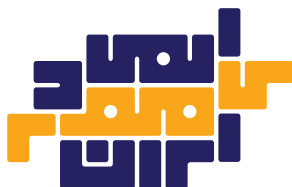
مسئله‌ی ۱ (۱۰۰ نمره)

به ازای $n \geq 3$ ، دنباله‌ی اعداد صحیح $a_1, a_2, \dots, a_n$ را «کامل‌رنگی» می‌نامیم هرگاه بتوان یال‌های گراف کامل K_n با مجموعه‌ی رئوس $v_1, v_2, \dots, v_n$ را طوری رنگ‌آمیزی کرد که رأس v_i دقیقاً a_i رنگ متمایز در میان یال‌های متصل به خود ببیند.

ثابت کنید هر دنباله با این شرایط، کامل‌رنگی است:

- به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، $1 \leq a_i \leq n-1$.
- عدد ۱ حداکثر یک بار در دنباله ظاهر شده باشد.

توجه: اگر ثابت کنید به ازای هر $2 \leq c \leq n-1$ ، دنباله‌ای که در آن $a_1 = a_2 = \dots = a_n = c$ باشد کامل‌رنگی است، ۲۵ امتیاز دریافت می‌کنید.



مسئله‌ی ۲ (۱۰۰ نمره)

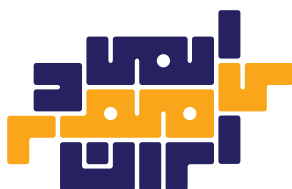
در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ ، هر زوج نامرتب از رئوس متمایز $u, v \in V$ که بین آن‌ها یالی در G وجود نداشته باشد $(\{u, v\} \notin E)$ ، یک «ضدیال» نامیده می‌شود. فرض کنید مجموعه‌ی رئوس این گراف را به دو بخش مجزای A و B (که ممکن است تهی باشند) افراز کرده‌ایم. «هزینه»ی این افراز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\text{تعداد ضدیال‌های درون } B) + (\text{تعداد ضدیال‌های درون } A) + (\text{تعداد یال‌های بین } A \text{ و } B)$$

اکنون برای یافتن افرازی با هزینه‌ی کم، الگوریتم زیر پیشنهاد شده است:

«به ازای هر رأس $v \in V$ ، مجموعه‌ی A_v را شامل رأس v و تمامی همسایه‌های آن در نظر گرفته و سایر رئوس گراف را در مجموعه‌ی B_v قرار می‌دهیم. پس از محاسبه‌ی هزینه‌ی افراز به ازای تک‌تک رئوس، افرازی را که کمترین هزینه را دارد به عنوان خروجی برمی‌گردانیم.»

ثابت کنید هزینه‌ی افراز حاصل از این الگوریتم، حداکثر ۳ برابر کمترین هزینه‌ی ممکن در میان تمامی افرازهای گراف است.



مسئله‌ی ۳ (۱۰۰ نمره)

در مسابقه‌ی محله یک بازی تیمی طراحی شده است. در این بازی $n \geq 2$ شرکت‌کننده با شماره‌های ۱ تا n به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره ایستاده‌اند و هرکدام یک توپ در دست دارد. روی توپ شرکت‌کننده‌ی i ام ($1 \leq i \leq n$) عدد i نوشته شده است.

هر حرکت «پاس‌کاری» به شکل زیر انجام می‌شود:

- ابتدا شرکت‌کنندگان تعداد دلخواهی گروه دو نفره از میان خود انتخاب می‌کنند، به طوری که دو عضو هر گروه روی دایره مجاور هم باشند و هر کس در حداکثر یک گروه قرار گیرد.
- سپس با سوت داور، دو عضو هر گروه توپ‌هایی را که در دست دارند با یکدیگر تعویض می‌کنند.

هدف این است که به وضعیتی برسیم که برای هر i ، توپ شماره‌ی i در دست شرکت‌کننده‌ی $i + 1$ باشد (و توپ شماره‌ی n در دست شرکت‌کننده‌ی ۱ باشد).

برای این کار حداقل به چند حرکت پاس‌کاری بر حسب n نیاز است؟

مان شو نو مید چون واقف زای از سر غیب
باشد اندر پرده بازی های پنهان غم مخور
حافظ