

مسئله‌ی ۱ (۱۰۰ نمره)

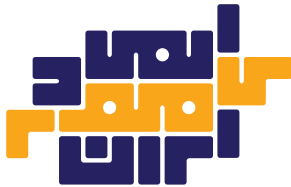
کیوان می‌خواهد حلوا برنجی درست کند. او برای این کار به a کیلوگرم روغن، b کیلوگرم آرد و c کیلوگرم برنج نیاز دارد. (a, b و c اعداد صحیح نامنفی هستند.) در شهر کیوان، آیین تأمین‌کننده‌ی این مواد است و آن‌ها را در قالب بسته می‌فروشد. او n بسته دارد؛ بسته‌ی i ام ($1 \leq i \leq n$) محتوایی برابر با مجموعه‌ی S_i دارد و قیمت آن $p_i > 0$ است.

هر S_i زیرمجموعه‌ای ناتهی از {برنج، آرد، روغن} است و بسته‌ی i ام دقیقاً یک کیلوگرم از هر عضو S_i را در خود دارد و از بقیه‌ی اجناس چیزی ندارد. بنابراین هر بسته یکی از ۷ حالت غیرتهی ممکن را دارد؛ مثلاً یک بسته می‌تواند شامل فقط یک کیلوگرم برنج باشد، یا شامل دقیقاً یک کیلوگرم آرد و یک کیلوگرم روغن، یا شامل یک کیلوگرم از هر سه جنس.

کیوان زیرمجموعه‌ای از این n بسته را از آیین می‌خرد و هزینه‌ی او برابر مجموع قیمت بسته‌های خریداری‌شده است. کیوان می‌خواهد با کمترین هزینه‌ی ممکن خرید کند، به‌طوری که در بسته‌های خریداری‌شده مجموعاً حداقل a کیلوگرم روغن، حداقل b کیلوگرم آرد و حداقل c کیلوگرم برنج وجود داشته باشد. فرض کنید چنین خریدی شدنی است یعنی مجموع همه‌ی n بسته این نیاز را برآورده می‌کند.

الگوریتمی با زمان اجرای $O(n^2 \log n)$ ارائه دهید که کمترین هزینه‌ی ممکن را محاسبه کند، و درستی و پیچیدگی زمانی آن را اثبات کنید.

توجه: اگر الگوریتم شما زمان اجرای $O(n^3)$ داشته باشد، ۴۰ امتیاز دریافت می‌کنید.



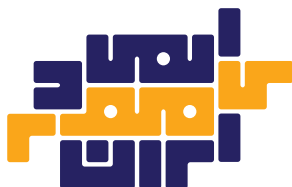
مسئله‌ی ۲ (۱۰۰ نمره)

یک جدول بسیار بزرگ را در نظر بگیرید که از خانه‌های مربعی تشکیل شده است. در ابتدا تمام خانه‌ها سفید هستند. یک جادوگر در هر مرحله می‌تواند یک مربع دلخواه از صفحه را انتخاب کند؛ به شرطی که ضلع‌های آن روی خطوط جدول قرار گرفته باشند. سپس تمام خانه‌های داخل آن مربع را سیاه می‌کند. خانه‌ای که قبلاً سیاه شده باشد، همچنان سیاه باقی می‌ماند. جادوگر این کار را دقیقاً n بار انجام می‌دهد.

در پایان، یک خانه‌ی سفید را خانه‌ی «ویژه» می‌نامیم اگر هر دو خانه‌ی زیر آن و سمت راست آن سیاه باشند.

الف) برای هر $n \geq 4$ ، مثالی پیدا کنید که در پایان حداقل n خانه‌ی ویژه وجود داشته باشد. (۳۰ امتیاز)

ب) ثابت کنید که تعداد خانه‌های ویژه، صرف‌نظر از انتخاب مربع‌ها، حداکثر $2n$ است. (۷۰ امتیاز)



آزمون نهایی دوره‌ی تابستان سی و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

آزمون نظری اول - ۲۵ شهریور ۱۴۰۵ (زمان: ۵ ساعت)

المپیاد کامپیوتر ایران

مسئله‌ی ۳ (۱۰۰ نمره)

کمیته‌ی المپیاد کامپیوتر تصمیم دارد برای تشویق دانش‌آموزان المپیادی به آن‌ها خرس عروسی جایزه بدهد. در دوره‌ی تابستانه n دانش‌آموز شرکت کرده و برای آن‌ها n خرس عروسی متمایز تهیه شده است. هر دانش‌آموز، مستقل از دیگران، یک ترتیب ترجیح اکید برای خرس‌ها دارد. به بیان دیگر هر دانش‌آموز برای خود فهرستی از همه‌ی خرس‌ها دارد به طوری که خرس اول فهرست را به خرس دوم، خرس دوم را به خرس سوم، و به همین ترتیب هر خرس را به خرس بعدی ترجیح می‌دهد.

یک «تطابق» روشی برای تقسیم خرس‌ها بین دانش‌آموزان است که در آن هر دانش‌آموز دقیقاً یک خرس می‌گیرد و هر خرس نیز دقیقاً به یک دانش‌آموز داده می‌شود.

برای دو تطابق M و M' ، می‌گوییم دانش‌آموز i ، تطابق M را به M' ترجیح می‌دهد، اگر خرسی که در M به او می‌رسد، در فهرست ترجیحات او بالاتر از خرسی باشد که در M' به او می‌رسد.

ثابت کنید برای هر عدد صحیح k ($1 \leq k \leq n$) می‌توان k تطابق $M_1, M_2, \dots, M_k$ انتخاب کرد، به طوری که برای هر تطابق دلخواه M ، تعداد دانش‌آموزانی که M را به همه‌ی تطابق‌های $M_1, M_2, \dots, M_k$ ترجیح می‌دهند، حداکثر $\frac{n}{k}$ باشد.

اگر فقط کتاب‌هایی را بخوانی که بهر می‌خوانند، فقط همان گونه فکر خواهی کرد که بشیه فکر می‌کنند.

ماروکی موراگامی (رمان جفل نوژی)