

به نام خدا

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نهایی نظری یکم

وقت: ۵ ساعت

جمعه ۲ شهریور ۱۴۰۳

توجه کنید که ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.

#### مسئله‌ی یکم ..... ۱۰۰ امتیاز

پوپک، پونه و پرند می‌خواهند روی یک دور  $n$  رأسی که رئوس آن با اعداد ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری شده‌اند بازی کنند. پونه یک مهره‌ی سفید و پوپک یک مهره‌ی سیاه دارد که در ابتدا هر دوی این مهره‌ها روی رأس شماره ۱ هستند. پونه و پوپک یکی در میان (با شروع از پونه) روی این دور بازی می‌کنند طوری که هر کس در نوبتش مهره‌ی خود را از روی رأس فعلی برداشته و روی یکی از رئوس همسایه‌اش قرار می‌دهد. در ابتدای بازی و نیز پس از حرکت هر کدام از این دو نفر، پرند یک «عکس» از وضعیت مهره‌ها روی دور می‌گیرد. دو عکس متفاوتند اگر حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. شماره رأسی که مهره‌ی پونه (مهره‌ی سفید) روی آن قرار دارد در این دو عکس متفاوت باشد.
  ۲. شماره رأسی که مهره‌ی پوپک (مهره‌ی سیاه) روی آن قرار دارد در این دو عکس متفاوت باشد.
- پوپک و پونه می‌خواهند همه‌ی عکس‌ها متفاوت ثبت شوند، حداکثر چند مرحله می‌توانند بازی کنند؟

#### مسئله‌ی دوم ..... ۱۰۰ امتیاز

کمترین  $k$  را بیابید که بتوان یال‌های گراف کامل  $۱۰۰۰$  رأسی را با  $k$  رنگ رنگ‌آمیزی کرد طوری که یال‌های هر رنگ تشکیل یک ستاره یا دو ستاره‌ی رأس مجزا بدهند.

#### مسئله‌ی سوم ..... ۱۰۰ امتیاز

نازنین  $۲^n$  عدد طبیعی کمتر مساوی  $۲^n$  را به صورت زیبا دور دایره نوشته است. اعداد لزوماً متمایز نیستند. فاصله‌ی دو عضو از دایره را کمینه تعداد اعضای مابین آن دو تعریف می‌کنیم. برای مثال دو عضو مجاور فاصله‌ی صفر دارند. یک ترتیب زیبا است اگر و تنها اگر به ازای هر عدد طبیعی  $m$  هیچ دو عضوی وجود نداشته باشد که هر دو از  $m$  بزرگتر باشند و فاصله‌شان کمتر از  $m$  باشد.

نازنین طوری این اعداد را نوشته است که مجموع آن‌ها بیشینه باشد.

- ثابت کنید مجموع اعداد دور دایره از  $\Omega(n^{2^n})$  است. (۵۰ امتیاز)
- ثابت کنید مجموع اعداد دور دایره از  $O(n^{2^n})$  است. (۵۰ امتیاز)

اگر تمام شب‌های دیدن خورشید کردی، لذت تماشای ستارگان را از دست خواهی داد.  
وليام شیکسپیر