

سوال ۱: تعویض اتاق امتیاز ۱۸

یک هتل دارای n اتاق است و در هر اتاق آن، دقیقاً یک نفر حضور دارد. در هر مرحله می‌توانیم دو اتاق را انتخاب کرده و افراد داخل آن‌ها را با هم جابه‌جا کنیم. در هر جابه‌جایی، هیچ کدام از دو نفر نباید به اتاقی برود که در یکی از مراحل قبلی در آن حضور داشته است. هدف این است که هر فرد، حضور در هر یک از n اتاق هتل را تجربه کند. اگر این کار امکان‌پذیر باشد، می‌گوییم n عددی «کامل» است. برای مثال، ۲ عددی کامل است؛ زیرا اگر $n = 2$ باشد، با یک جابه‌جایی به هدفمان می‌رسیم. همچنین می‌توان نشان داد که ۳ عدد کاملی نیست.

فرض کنید اعداد طبیعی m و n هر دو کامل باشند. در این صورت ثابت کنید حاصل ضرب آن‌ها (یعنی عدد mn) نیز کامل است. برای گرفتن ۵ امتیاز از این سوال، کافی است نشان دهید که اگر n عددی کامل باشد، آن‌گاه $2n$ نیز عددی کامل است.

سوال ۲: گراف زیبا..... ۲۰ امتیاز

به یک گراف «زیبا» می‌گوییم، اگر همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

- ساده باشد.
- تعداد رأس‌های آن 2025 باشد.
- هر دور آن دقیقاً 4 رأس داشته باشد.

الف) فرض کنید G یک گراف زیبا باشد. ثابت کنید می‌توان یک یال به G اضافه کرد، طوری که گراف حاصل ساده بماند و طول بزرگ‌ترین دور آن از 4 بیش‌تر نشود. [۱۴ امتیاز]

ب) یک گراف زیبای G ارائه دهید که با اضافه کردن هم‌زمان هر دو یالی به G ، گراف حاصل حداقل یکی از دو شرط زیر را داشته باشد: [۶ امتیاز]

۱. گراف حاصل ساده نباشد.
۲. طول بزرگ‌ترین دور گراف حاصل از 4 بیش‌تر باشد.

سوال ۳: گراف بازی ۲۰ امتیاز

فاطمه و علی در حال بازی روی گرافی 20×25 رأسی هستند که در ابتدا هیچ یالی ندارد. در هر مرحله، ابتدا فاطمه رأس‌ها را به دو دسته افراز می‌کند و سپس، علی دو رأس غیر مجاور را که در یک دسته باشند انتخاب و یال بین آن‌ها را رسم می‌کند. اگر در مرحله‌ای یک مسیر به طول ۳ (یعنی یک مسیر با ۴ رأس و ۳ یال) در گراف حاصل ایجاد شود، بازی به پایان می‌رسد.

الف) فرض کنید فاطمه می‌خواهد تعداد مراحل بیشینه و علی می‌خواهد تعداد مراحل کمینه شود. اگر هر دو نفر در طول بازی، بهترین حرکت ممکن را برای رسیدن به هدفشان انجام دهند، بازی پس از چند مرحله پایان می‌یابد؟ [۱۰ امتیاز]

ب) فرض کنید فاطمه می‌خواهد تعداد مراحل کمینه و علی می‌خواهد تعداد مراحل بیشینه شود. اگر هر دو نفر در طول بازی، بهترین حرکت ممکن را برای رسیدن به هدفشان انجام دهند، بازی پس از چند مرحله پایان می‌یابد؟ [۱۰ امتیاز]

سوال ۴: پر کردن جدول ۲۲ امتیاز

یک جدول 2025×2025 داریم. یک خانه از این جدول را خانه‌ای «در حاشیه‌ی جدول» می‌گوییم اگر در سطر اول، سطر آخر، ستون اول یا ستون آخر جدول باشد. دو خانه از جدول «مجاور» هستند اگر و تنها اگر در دقیقاً یک ضلع مشترک باشند. به دنباله‌ای از خانه‌های جدول که عضو ابتدا و انتهای آن به ترتیب A و B است و هر دو عضو متوالی آن مجاور هم هستند نیز یک «مسیر» بین دو خانه‌ی A و B می‌گوییم. می‌خواهیم در هر یک از خانه‌های جدول، یکی از اعداد 1 تا k را قرار دهیم به طوری که همه‌ی شرایط زیر رعایت شوند:

- از هر عدد حداکثر دو بار استفاده شده باشد.
- اگر دو خانه دارای عدد یکسان x باشند، هر کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو خانه، شامل حداقل یک خانه با عددی اکیداً بزرگ‌تر از x باشد. طبیعتاً در این صورت دو خانه‌ی مجاور هم نباید عدد یکسانی داشته باشند.
- عدد هر خانه در حاشیه‌ی جدول اکیداً بزرگ‌تر از عدد هر خانه‌ای باشد که در حاشیه‌ی جدول نیست.

کم‌ترین مقدار ممکن برای k را بیابد.

برای پاسخ کامل این سوال، لازم است یک عدد q ارائه دهید و به‌ازای آن، هر دو کار زیر را انجام دهید. طبیعتاً اگر موفق به انجام فقط یکی از دو مورد شوید، بخشی از امتیاز سوال به شما تعلق می‌گیرد.

۱. برای پر کردن جدول، شیوه‌ای ارائه دهید که در آن، $k = q$ باشد.
۲. ثابت کنید شیوه‌ای برای پر کردن جدول وجود ندارد که در آن، $k < q$ باشد.