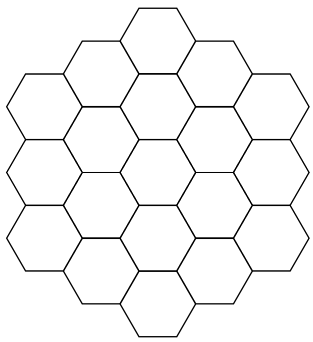
- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۶ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

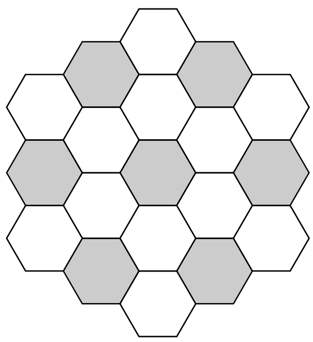
۱ می‌خواهیم خانه‌های شکل زیر را با رنگ‌های سفید و سیاه رنگ‌آمیزی کنیم. **تلاطُم** یک رنگ‌آمیزی برابر با تعداد جفت خانه‌های هم‌رنگی است که یک ضلع مشترک دارند. کمترین میزان تلاطم که می‌توانیم با رنگ‌آمیزی جدول به دست آوریم چند است؟



۱) ۱۳ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۱۴ ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

یک رنگ‌آمیزی با تلاطم ۱۲ در زیر آمده است.



می‌توان نشان داد که این تلاطم کم‌ترین مقدار ممکن است. □

۲ الگوریتم زیر را درنظر بگیرید:

۱. آرایه‌ی A به طول n را ورودی بگیر.
۲. اگر آرایه‌ی A مرتب بود، به مرحله‌ی ۷ برو.
۳. دو آرایه‌ی $X = A[1 \cdots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ و $Y = A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \cdots n]$ را درنظر بگیر.

۴. عدد صحیح t را ورودی بگیر؛ اگر t عددی زوج بود، به مرحله‌ی ۶ برو.

۵. آرایه‌ی A را برابر با X و مقدار n را برابر با $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.

۶. آرایه‌ی A را برابر با Y و مقدار n را برابر با $n - \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.

۷. آرایه‌ی A را خروجی بده.

۸. پایان.

منظور از $A[l \cdots r]$ بازه‌ی l تا r از آرایه‌ی A (شامل خود l و r) است؛ برای مثال اگر $A = \langle ۲, ۱, ۳, ۵, ۴ \rangle$ باشد $A[۲ \cdots ۴] = \langle ۱, ۳, ۵ \rangle$ می‌شود. اگر مقادیر t را به صورتی ورودی دهیم که طول آرایه‌ی نهایی بیشینه شود، به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد ۱ تا ۸ طول آرایه‌ی نهایی حداقل برابر با ۲ خواهد بود؟

۱) ۲۰۱۶۰   ۲) ۴۰۳۲۰   ۳) ۳۴۵۱۰   ۴) ۳۰۲۴۰   ۵) ۳۷۸۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

می‌دانیم تنها جایگشت‌هایی مطلوب نیستند که در پایان الگوریتم فقط یک عدد باقی مانده باشد. اگر تعداد این جایگشت‌ها را به دست آوریم، می‌توانیم به کمک اصل متمم به پاسخ نهایی برسیم. برای این کار کافی است جایگاه‌ها را به ۴ دسته‌ی دوتایی تقسیم کنیم و مطمئن شویم هیچ‌کدام از جفت‌ها به صورت صعودی مرتب نشده باشند. سپس دو عدد موجود در هر جفت را انتخاب کرده و با ترتیب نزولی آن‌ها را قرار می‌دهیم:

$$\binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۲} \times \binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۲} = ۲۵۲۰$$

همچنین تعداد کل جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۸ برابر با $۸! = ۴۰۳۲۰$ است و در نتیجه پاسخ نهایی مسئله برابر با $۴۰۳۲۰ - ۲۵۲۰ = ۳۷۸۰۰$ می‌شود. □

۳ در شهر جادوگرها شش نفر زندگی می‌کنند که هرکدام از آن‌ها راستگو یا دروغگو هستند. افراد راستگو همواره راست و افراد دروغگو همواره دروغ می‌گویند. سِلتی می‌خواهد متوجه راستگو یا دروغگو بودن هرکدام از آن‌ها شود و در نتیجه از آن‌ها خواست اطلاعاتی در رابطه با خود و دیگران به او بدهند:

- فرد A: B دروغ می‌گوید.
- فرد B: حداقل یکی از A و C دروغ می‌گویند.
- فرد C: A راست می‌گوید.
- فرد D: دقیقاً دو نفر راست می‌گویند.
- فرد E: D دروغ می‌گوید.
- فرد F: دقیقاً سه نفر راست می‌گویند.

سلتی به چند طریق می‌تواند راستگو یا دروغگو بودن افراد را مشخص کند، به نحوی که تناقضی در گفته‌های هیچ‌کدام از آن‌ها وجود نداشته باشد؟

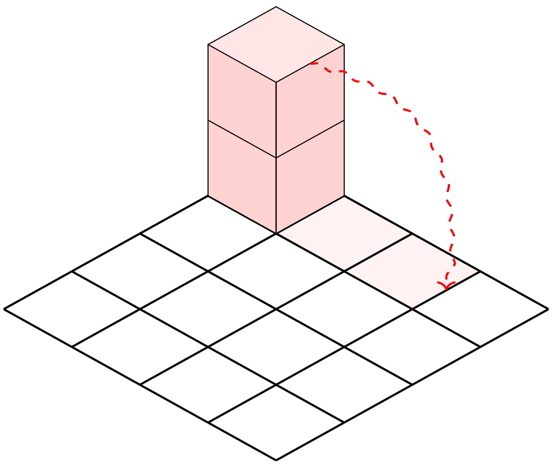
۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۵   ۴) ۴   ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

- **اگر فرد C راستگو باشد:** در این صورت فرد A راستگو و فرد B دروغگو می‌باشد. از آنجایی که حداقل دو نفر راستگو بوده‌اند، فرد D نمی‌تواند راستگو باشد. زیرا در غیر این صورت حداقل ۳ نفر راستگو بوده‌اند که منجر به تناقض می‌شود. پس از آنجایی که فرد D دروغگو می‌باشد، فرد E راستگو است. اما در این صورت فرد F چه راستگو یا چه دروغگو باشد دچار تناقض می‌شویم.
- **اگر فرد C دروغگو باشد:** در این صورت فرد A دروغگو و فرد B راستگو می‌باشد.
  - **اگر فرد E راستگو باشد:** به این معنی است که فرد D دروغگو است و فرد F باید راستگو باشد.
  - **اگر فرد E دروغگو باشد:** به این معنی است که فرد D راستگو است و فرد F باید دروغگو باشد.

پس در مجموع دو حالت معتبر داریم. □

۴ یک شش وجهی صورتی ۲ × ۱ × ۱ داریم که در یکی از گوشه‌های جدول ۴ × ۴ مانند شکل زیر قرار دارد. در هر گام می‌توان آن را روی یکی از وجه‌هایش غلتاند (به شرطی که از جدول بیرون نزند) و تمام خانه‌های زیر آن را به رنگ صورتی درآورد (یک خانه می‌تواند چندین بار رنگ‌آمیزی شود). در ابتدا تمام خانه‌های جدول به جز خانه‌ی زیرین شش وجهی سفید هستند. حداقل چند گام لازم داریم تا کل جدول را به رنگ صورتی درآوریم؟



۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

ابتدا یک مثال با ۹ حرکت ارائه می‌دهیم:

- دو حرکت به سمت راست
- دو حرکت به سمت پایین
- دو حرکت به سمت چپ
- یک حرکت به سمت بالا
- دو حرکت به سمت راست

واضح است که برای رنگ کردن ۱۵ خانه حداقل به ۸ حرکت نیاز داریم. همچنین اگر بخواهیم با دقیقاً ۸ حرکت جدول را رنگ کنیم، در حداکثر ۱ مرحله سطح ۱ × ۱ شش وجهی می‌تواند روی زمین قرار بگیرد. زیرا در غیر

اینصورت حداکثر تعداد خانه‌های رنگ شده برابر با $۱۴ = ۲ + ۲ \times ۶$ می‌شود. همچنین بدون استفاده از سطح ۱×۱ نمی‌توان کل جدول را طی کرد و در طی تمام مراحل نمی‌توانیم خانه‌ی تکراری رنگ کنیم. پس کافی است روی اینکه این سطح را در کدام حرکت استفاده کرده‌ایم، حالت‌بندی کنیم. این حرکت در یکی از مراحل ۲ تا ۵ استفاده شده است که در تمامی این حالات پوشاندن سایر بخش‌های جدول امکان‌پذیر نیست. □

۵ جدولی ۳×۲ داریم که در آن سه جفت A, B, C وجود دارند. فاصله‌ی منهتنی دو خانه‌ی (x, y) و (x', y') برابر با $|x - x'| + |y - y'|$ است؛ برای مثال در جدول زیر اگر مختصات هر خانه از جدول را برابر با شماره‌ی سطر و ستون آن در نظر بگیریم، جمع فواصل منهتنی این سه جفت برابر با $۵ = ۱ + ۱ + ۳$ می‌شود. به ازای تمام حالات چینش این سه جفت در جدول، امید ریاضی جمع فواصل منهتنی این جفت‌ها چه‌قدر است؟

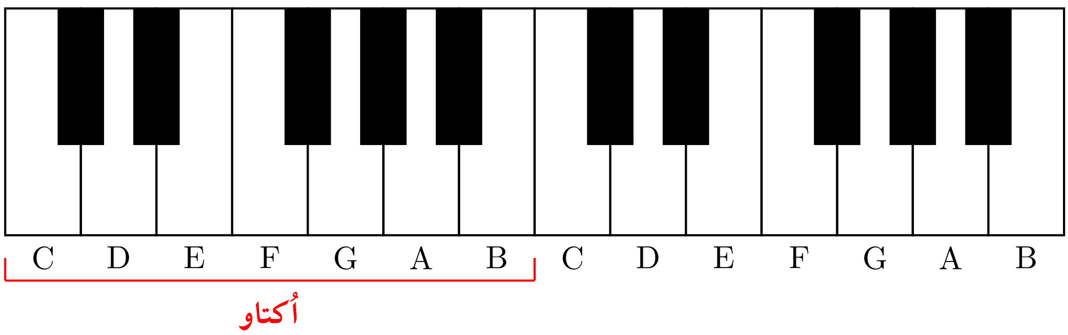
B	B	A
A	C	C

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$ ۳) ۵ ۴) ۱۰ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۶ صفحه کلید پیانو از هفت اُکتاو با چینشی یکسان تشکیل می‌شود که کنار هم قرار می‌گیرند. هر اکتاو از دوازده کلید سیاه و سفید تشکیل می‌شود که در چینش استاندارد، این ترکیب از هفت کلید سفید و پنج کلید سیاه تشکیل شده است. در شکل زیر می‌توانید چینش دو اکتاو متوالی در صفحه کلید اصلی پیانو را ببینید:



به دلیل کوچک‌تر بودن کلیدهای سیاه و سختی فشردن آن‌ها، نمی‌توان دو کلید سیاه پشت سر هم در صفحه کلید داشت و باید بین هر دو کلید سیاه مجاور حداقل یک کلید سفید وجود داشته باشد. با توجه به این محدودیت، چند اکتاو معتبر به طول ۱۲ با تعداد کلیدهای سفید و سیاه دلخواه می‌توان ساخت که در کل صفحه کلید (در یک اکتاو یا بین دو اکتاو متوالی) هیچ دو کلید سیاه مجاوری وجود نداشته باشد؟

۱) ۳۷۷ ۲) ۲۳۳ ۳) ۲۸۸ ۴) ۳۲۲ ۵) ۱۴۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۷ هفت دیو با قدرت‌های $\langle ۱, ۵, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۳ \rangle$ و هفت انسان با قدرت‌های $\langle ۲, ۳, ۴, ۷, ۹, ۱۱, ۱۴ \rangle$ داریم. می‌دانیم در هر جنگ، هفت جفت انسان و دیو نبرد تن به تن می‌کنند و از هر جفت، فرد قدرتمندتر زنده می‌ماند. دو چینش در صورتی متمایزند که فردی وجود داشته باشد که رقیب او در این دو چینش متفاوت باشد. به ازای چند چینش اولیه، تعداد انسان‌هایی که زنده می‌مانند بیشترین مقدار ممکن است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۷۲ ۴) ۱۰۸ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که در هر چینش، انسان‌ها حداقل ۲ کشته می‌دهند. افراد $\langle ۲, ۳, ۴ \rangle$ تنها از یک دیو قدرت بیشتری دارند. پس در هر چینش حداقل دو نفر از آنها با افراد قوی‌تر از خود نبرد کرده و می‌میرند. حال به ۳ طریق فردی که از میان آن سه نفر زنده می‌ماند را انتخاب می‌کنیم و رقیب او را دیو اول (با قدرت ۱) قرار می‌دهیم. سپس به ۲ طریق رقیب انسان به قدرت ۷ را از میان $\langle ۵, ۶ \rangle$ انتخاب می کنیم و به طریق مشابه، به ۲ طریق از میان مجموعه‌ی $\langle ۵, ۶, ۸ \rangle$ که یکی از اعضای آن به عنوان رقیب انسان قبلی انتخاب شده است رقیب انسان به قدرت ۹ را انتخاب می‌کنیم. این روند را ادامه می‌دهیم تا رقیب قوی‌ترین انسان نیز انتخاب شود. با این کار تنها تعیین رقیب‌های دو انسان کشته شده باقی می‌ماند که به ۲ طریق می‌توان دو دیو باقی مانده را برای رقیب‌های آن دو انتخاب کرد. در انتها تعداد حالات برابر $۱۴۴ = ۲ \times ۳ \times ۲^۳ \times ۳$ می‌شود. □

۸ جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۰ را درنظر بگیرید که می‌توانیم عملیات زیر را به تعدادی دلخواه روی آن انجام دهیم: در هر مرحله عددی دلخواه از جایگشت که تا به حال آن را انتخاب نکرده‌ایم را از جایگشت حذف و سپس به انتهای آن اضافه می‌کنیم؛ برای مثال جایگشت زیر پس از انتخاب عدد ۹ (در صورتی که تا به حال انتخاب نشده باشد) بدین شکل تغییر می‌یابد:

$$\langle ۴, ۱, ۶, \underline{۹}, ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۷, ۸ \rangle \to \langle ۴, ۱, ۶, ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۷, ۸, \underline{۹} \rangle$$

تعداد جایگشت‌های اولیه‌ای که می‌توان با انجام دقیقاً پنج مرحله آن‌ها را تبدیل به یک جایگشت صعودی یا نزولی کرد چه‌قدر است؟

۱) ۶۰۲۲۸ ۲) ۳۰۲۴۰ ۳) ۳۰۴۹۲ ۴) ۶۰۴۸۰ ۵) ۱۵۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

فرض کنید هر عدد را که به انتهای جایگشت می‌بریم به رنگ آبی در بیاوریم. در این صورت همیشه تنها یک بازه در آخر جایگشت به رنگ آبی است و باقی اعداد بی‌رنگ هستند. همچنین از آنجایی که ۵ حرکت انجام داده‌ایم، حداکثر ۵ عدد آخر به رنگ آبی هستند که به این معنی است که ۵ عدد اول جایگشت نهایی بی‌رنگ هستند و ترتیب‌شان نسبت به هم عوض نشده است.
این ۵ عدد باید به ترتیب اعداد ۱ تا ۵ و یا ۱۰ تا ۶ باشند. پس در جایگشت ابتدایی یا باید اعداد ۱ تا ۵ به ترتیب صعودی و یا اعداد ۱۰ تا ۶ به ترتیب نزولی آمده باشند. همچنین با شروع از هر جایگشت به این صورت می‌توان به حالتی مطلوب رسید. در نتیجه تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با:

$$۲ \times \frac{۱۰!}{۵!} - \binom{۱۰}{۵} = ۶۰۲۲۸$$

□

۹ برج سَرداد ۵ طبقه دارد که در طبقه‌ی همکف لابی و در طبقات ۱ تا ۵ واحدهای مسکونی قرار دارند. در هر طبقه‌ی این برج ۵ نفر زندگی می‌کنند و آسانسور برج نیز ۵ نفر ظرفیت دارد. در یک روز عجیب به دلیل به صدا درآمدن آژیر خطر، همه‌ی ساکنین پشت در آسانسور طبقه‌ی خودشان در یک صف می‌ایستند تا به لابی بروند. همچنین قبل از این اتفاق آسانسور در طبقه‌ی ۵ بوده است.
در هر مرحله آسانسور به سمت یکی از طبقات مورد نظر مدیر ساختمان حرکت می‌کند و به اندازه‌ی تعدادی که او مشخص کرده است افراد آن طبقه را از ابتدای صف سوار می‌کند. اگر آسانسور به لابی برسد، تمام افراد داخل آن پیاده می‌شوند و هیچ‌کس حق پیاده شدن در حین مسیر را ندارد. در هر طبقه، کسی که در اول صف قرار دارد و تابلوی طبقات آسانسور را می‌بیند به ازای هر باری که طبقه‌ی آن عوض می‌شود و او سوارش نیست یک واحد اعصابش خرد می‌شود. هدف مدیر ساختمان این است که مجموع اعصاب خردی اعضای برج کمینه شود. حداقل مجموع اعصاب خردی اعضای برج که مدیر ساختمان می‌تواند به آن برسد چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۷۵ ۴) ۵۰ ۵) ۷۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۱۰ پیکاسو نقاش مطرح سبک کوبیسم بود که توانایی نقاشی و رنگ‌آمیزی هرچیزی را داشت. او برای رنگ‌آمیزی درخت‌ها از دو اصل **عدم شلختگی** و مهمعدم کسل‌کنندگی پیروی می‌کرد:

- عدم شلختگی: هیچ رأسی نباید بیش از دو رنگ متفاوت در میان رأس‌های مجاورش داشته باشد.
- عدم کسل‌کنندگی: باید از بیشترین تعداد رنگ ممکن در رنگ‌آمیزی رأس‌ها استفاده شود.

چند درخت ده رأسی وجود دارد که پیکاسو آن‌ها را با توجه به اصول رنگ‌آمیزی خود با دقیقاً چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی می‌کند؟ دو درخت T_1 و T_2 متفاوت هستند، اگر و تنها اگر یالی مانند (u, v) در درخت T_1 بین دو رأس u و v وجود داشته باشد که در درخت T_2 قرار نداشته باشد.

۱) ۴۶۰۸۰ ۲) ۴۵۹۹۰ ۳) ۲۲۸۶۰ ۴) ۲۲۹۵۰ ۵) ۱۱۴۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر درختی یک مسیر با k رأس داشته باشد، نقاش حداقل از k رنگ برای رنگ‌آمیزی آن استفاده می‌کند. از طرفی تنها درخت n رأسی که مسیر ۴ رأسی ندارد، گراف S_n (ستاره‌ی n رأسی) است که نقاش آن را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کند. این نشان می‌دهد که درخت‌های n رأسی‌ای که پیکاسو آن‌ها را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کند، مسیری با ۴ رأس مانند $\langle p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \rangle$ دارند. از طرفی p_1 و p_4 رأس مجاور دیگری ندارند؛ در غیر این صورت بلندترین مسیر گراف بزرگ‌تر از ۴ خواهد شد. با استدلال مشابهی می‌توان گفت که سایر رأس‌ها دقیقاً به یکی از p_2 و p_3 متصل هستند.
در انتها دقت کنید از آنجا که رأس‌های مجاور p_2 و p_3 حداکثر دو رنگ متفاوت دارند و هر رأسی دقیقاً مجاور یکی از این دو است، گرافی که شرایط فوق را داشته باشد با حداکثر ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود. مطابق استدلال‌های فوق، به $\binom{10}{2} = 45$ طریق رأس‌های p_2 و p_3 را انتخاب می‌کنیم و رأس مجاور ۸ رأس باقی‌مانده را به $2^8 - 2 = 254$ طریق انتخاب می‌کنیم. در انتها حاصل برابر با $45 \times 254 = 11430$ می‌شود. □

۱۱ منظور از $f(x)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح x بر ۲ است؛ برای مثال $f(۱۵) = ۱$ و $f(۱۰) = ۰$ است. فرض کنید عددی صحیح مانند x داریم. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. مقدار k را برابر ۰ و مقدار $last$ را برابر ۱− قرار بده.
۲. اگر $f(x) = ۰$ بود، به مرحله‌ی ۵ برو.
۳. اگر $last \neq ۱$ بود، مقدار k را یکی اضافه کن.
۴. مقدار $last$ را برابر ۱ قرار بده و به مرحله‌ی ۷ برو.
۵. اگر $last \neq ۰$ بود، مقدار k را یکی اضافه کن.
۶. مقدار $last$ را برابر ۰ قرار بده.
۷. مقدار x را برابر $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ قرار بده.
۸. اگر $x > ۰$ بود، به مرحله‌ی ۲ برو.
۹. مقدار k را به عنوان خروجی اعلام کن.
۱۰. پایان.

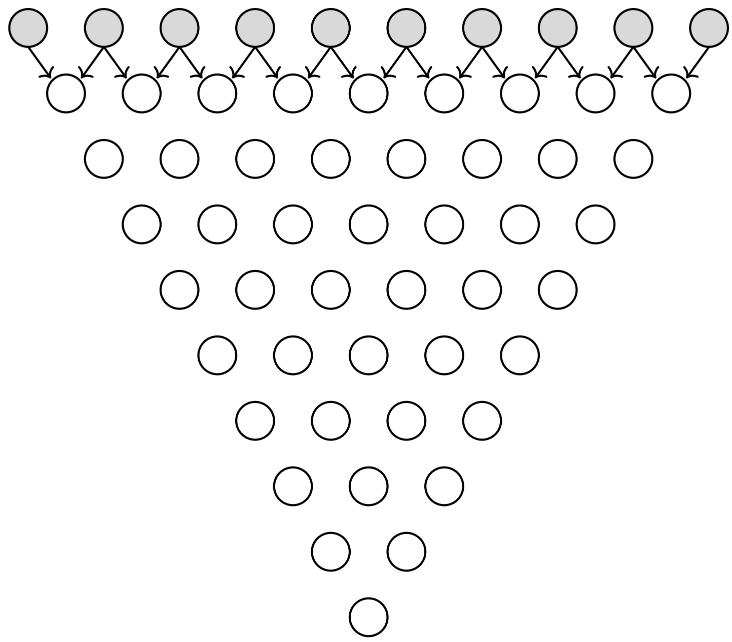
اگر الگوریتم بالا را به ازای تمام مقادیر $۰ \leqslant x < ۱۰۲۴$ انجام دهیم و خروجی نهایی آن‌ها را با یکدیگر جمع کنیم، حاصل برابر با چه عددی است؟

۱) ۵۱۲۱ ۲) ۲۵۶۰ ۳) ۵۶۳۲ ۴) ۵۱۲۰ ۵) ۴۶۰۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

۱۲ در شکل زیر، ابتدا خانه‌های بالاترین سطر را با اعداد ۰، ۱ یا ۲ پر می‌کنیم و سپس هر خانه از سطرهای دیگر برابر مجموع دو خانه‌ی بالایی‌اش می‌شود. به ازای چند حالت مقداردهی اعداد بالاترین سطر، مجموع اعداد آن و همچنین عدد نهایی خانه‌ی پایین هرم هردو مضربی از ۳ می‌شوند؟

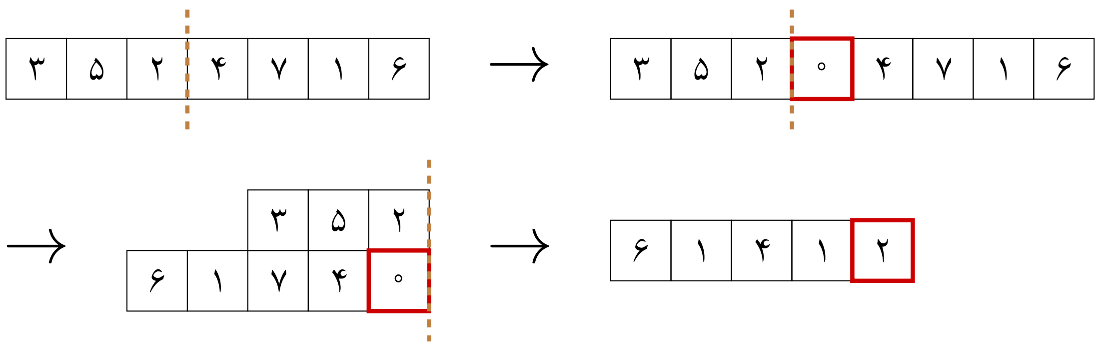


۱) ۱۵۳۶ ۲) ۶۵۶۱ ۳) ۲۳۰۴ ۴) ۷۶۸ ۵) ۱۹۶۸۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

تعداد بارهایی که مقدار هر خانه در پایین‌ترین خانه‌ی هرم تاثیر دارد با توجه به مثلث خیام_پاسکال تعیین می‌شود. میزان تاثیر خانه‌ی iام بالاترین سطر برابر با $\binom{۹}{i}$ است. در نتیجه مقدار خانه‌های دوم تا نهم هیچ تاثیری در باقی‌مانده‌ی خانه‌ی پایین ندارد و خانه‌های اول و دهم دارای ضریب یک هستند. پس می‌توانیم دو خانه مانند خانه‌های اول و دوم را کنار گذاشته و سایر خانه‌های بالاترین سطر را به $۳^۸$ طریق مقداردهی کنیم. مقدار خانه‌ی اول با توجه به خانه‌ی دهم به صورت یکتا و سپس مقدار خانه‌ی دوم با توجه به جمع ۹ خانه‌ی دیگر به صورت یکتا تعیین می‌شود. □

۱۳ نواری به طول ۷ داریم که در ابتدا روی آن اعداد ۱ تا ۷ نوشته شده‌اند. عمل **تازا** را بدین شکل تعریف می‌کنیم؛ ابتدا خطی دلخواه میان دو خانه‌ی مجاور از نوار انتخاب می‌کنیم. سپس یک خانه‌ی جدید با عدد صفر به سمت راست خط اولیه اضافه می‌کنیم. در ادامه نوار را از خط اولیه تا می‌کنیم و به جای مقادیر خانه‌هایی که روی هم قرار گرفته‌اند، مقدار **یای انحصاری** (XOR) آن دو خانه را قرار می‌دهیم:



عملیات یای انحصاری دو عدد را در مبنای ۲ نظر می‌گیرد و هر رقمی که در این دو عدد متفاوت است، در حاصل برابر یک و باقی رقم‌ها برابر صفر خواهند بود؛ برای مثال حاصل یای انحصاری ۳ و ۵ برابر ۶ است:

$$۳ \oplus ۵ = ۰۱۱_۲ \oplus ۱۰۱_۲ = ۱۱۰_۲ = ۶$$

عملیات تازا را می‌توان آن‌قدر روی آرایه انجام داد که طول آن برابر با ۲ شود. اگر **قدرت تازایی** یک آرایه را برابر حداکثر مقدار جمع دو عدد انتهایی آن پس از تعدادی حرکت دلخواه تعریف کنیم، جمع قدرت تازایی تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۷ چند است؟

۱) ۴۰۳۲۰ ۲) ۳۲۲۵۶ ۳) ۷۰۵۶۰ ۴) ۱۶۱۲۸ ۵) ۳۵۲۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۱۴ باب اسفنجی ۳۵ همبرگر تهیه کرده است که تمامی آن‌ها را می‌خواهد سرخ کند. سرخ شدن دو سمت هر همبرگر در مجموع ۱۴۰۴ ثانیه طول می‌کشد؛ یعنی اگر سمت زیرین همبرگر i اُم به t_i ثانیه برای سرخ شدن نیاز داشته

باشد، سمت دیگر آن به $۱۴۰۴ - t_i$ ثانیه نیاز دارد. باب اسفنجی مقادیر t_i را می‌داند و متوجه شده است که تمامی آن‌ها عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۱۴۰۴ هستند.
در ابتدا باب اسفنجی هرکدام از ۳۵ همبرگر را به طور همزمان از سمت دلخواه خود روی اجاق می‌گذارد و به شستن ظرف‌ها می‌پردازد. همچنین باب اسفنجی نباید هیچ سمتی از همبرگرها را بسوزاند؛ برای همین می‌تواند هر زمانی که دلش می‌خواهد از ظرف شستن دست بکشد و یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از همبرگرها را انتخاب و در زمانی ناچیز برگرداند تا سمت دیگر آن به سرخ شدن ادامه دهد. حداقل تعداد بارهایی که او لازم دارد تا قبل از پخته‌شدن همبرگرها دست از ظرف شستن بردارد تا بتواند آن‌ها را بدون سوزاندن حاضر کند چه‌قدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۳۵ ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ابتدا یک روش با ۱۰ مرحله ارائه می‌دهیم و سپس اثبات می‌کنیم حالتی وجود دارد که با کمتر از ۱۰ مرحله نمی‌توان از سوختن همبرگرها جلوگیری کرد. روش جلوگیری از سوختن همبرگرها به این شکل است که ابتدا تمامی همبرگرها را به سمتی که زمان بیشتری (یا مساوی) برای پختن نیاز دارد قرار می‌دهیم. سپس هنگامی که نصف زمان کل برای ما سپری شد، در قابلمه را باز کرده و هر همبرگر را به سمتی که بیشتر (یا مساوی) از زمان پختش باقی‌مانده است قرار می‌دهیم و همین کار را تا انتها ادامه می‌دهیم؛ یعنی هر بار بعد از سپری شدن سقف نصف زمان قبلی، در قابلمه را برداشته و همبرگرها را به سمتی که بیشتر (یا مساوی) از زمان پختشان باقی مانده قرار می‌دهیم.
برای اینکه اثبات کنیم که با کمتر از ۱۰ بار نمی‌توان این کار را انجام داد، ابتدا به این نکته توجه کنید که اگر k بار در قابلمه را برداشته باشیم کل بازه‌ی زمانی ما به $k + ۱$ قسمت تقسیم می‌شود. حال هر همبرگر در بعضی از این بازه‌ها به سمت پایین و در بعضی به سمت بالا قرار داشته است که یعنی باید جمع تعدادی از این بازه‌ها برابر t_i باشد. پس فرض کنید $\langle t_۰, t_۱, \cdots, t_{۱۰} \rangle = \langle ۲^۰, ۲^۱, \cdots, ۲^{۱۰} \rangle$ باشند و باقی t_iها مقدار دلخواهی داشته باشند. می‌دانیم برای ساختن اعداد $\langle ۲^۰, ۲^۱, \cdots, ۲^{۱۰} \rangle$ با جمع تعدادی عدد، به حداقل ۱۱ عدد نیاز داریم. پس برای اینکه حداقل ۱۱ بازه داشته باشیم باید حداقل ۱۰ بار در قابلمه را برداریم. □

۱۵ یک جدول ۳×۳ داریم که در یکی از خانه‌های آن موشی کور پنهان شده است. به هر سه خانه‌ای از جدول که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند یک **قطر پراکنده** و به هر سه خانه‌ای از جدول که در یک سطر، ستون یا قطر پراکنده باشند یک **گروه** می‌گوییم. هدف آن است که در کمترین تعداد مرحله موش کور را پیدا کنیم.
در هر مرحله یکی از خانه‌های دلخواه جدول مانند A را بازبینی می‌کنیم و اگر موش کور در آن‌جا بود او را دستگیر می‌کنیم. در غیر این صورت اگر موش کور در خانه‌ای مانند B باشد، پس از اتمام بازبینی فرار کرده و به خانه‌ی هم‌گروهی A و B می‌رود. حداقل تعداد مراحل لازم برای دستگیری موش کور چند است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) ۸ ۴) ۹ ۵) نمی‌توان با یک روش قطعی موش کور را دستگیر کرد.

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در ابتدای کار موش کور می‌تواند در هرکدام از ۹ خانه‌ی جدول قرار داشته باشد. پس در مرحله‌ی اول ۹ گزینه برای انتخاب داریم و مجبوریم یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم. اگر موش کور در خانه‌ای که ما انتخاب می‌کنیم قرار داشته باشد در همان مرحله‌ی اول دستگیر می‌شود. اما اگر در خانه‌ی دیگری باشد با توجه به اینکه در کدام

خانه قرار دارد، محل بعدی آن به طور یکتا تعیین می‌شود و همچنین هیچ‌گاه امکان ندارد موش کور از دو خانه‌ی متفاوت به یک مقصد مشترک حرکت کند.
پس اگر موش کور در مرحله‌ی اول دستگیر نشود، در یکی از ۸ خانه‌ی دیگر بوده و حال برای هر کدام از آن ۸ خانه می‌توانیم ببینیم که مقصد بعدی آن‌ها با توجه به حرکت ما کدام خانه است. پس در مرحله‌ی دوم ۸ گزینه برای انتخاب داریم. دوباره اگر نتوانیم خانه‌ی درست را انتخاب کنیم، موش کور در یکی از آن ۷ خانه‌ی دیگر قرار داشته که دوباره می‌توان مقصد هر کدام از آن‌ها را به صورت یک به یک تعیین کرد که یعنی در مرحله‌ی سوم ۷ خانه برای انتخاب داریم. همین ترتیب می‌توان در حداکثر ۹ مرحله موش کور را دستگیر کرد و ثابت کرد که هیچ روشی نداریم که بتوان تضمین کرد که موش کور در کمتر از ۹ مرحله پیدا می‌شود. □

حمید یک جدول 3×3 دارد که هر خانه‌ی آن با دقیقاً یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی شده است. **رنگ محبوب** یک سطر یا ستون، رنگی است که در آن سطر یا ستون بیشتر از رنگ دیگر تکرار شده است. حمید جدول را به ما نشان نمی‌دهد، اما رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها را به ما می‌گوید. **عدد ابهام** اطلاعات حمید برابر تعداد رنگ‌آمیزی‌های ممکن از جدول است که با اطلاعاتی که به ما داده است، سازگاری داشته باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۶ اگر حمید بگوید رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها سیاه است، عدد ابهام اطلاعات داده شده چه مقداری است؟

۱) ۳۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۵ ۴) ۳۳ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

۱۷ به ازای چند حالت از اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد، عدد ابهام برابر صفر است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۷ ۵) ۱۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۸ بیشترین عدد ابهام اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد برابر چه مقداری است؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۴ ۳) ۴۲ ۴) ۳۴ ۵) ۲۵

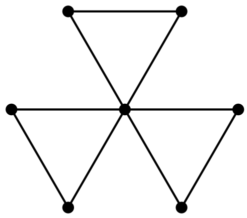
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

آقای مجری یک گراف به ببعی می‌دهد و از او می‌خواهد که بیشترین تعداد یال را به گراف اضافه کند، به طوری که همچنان ساده بماند و اندازه‌ی بزرگ‌ترین زیرگراف کامل آن تغییری نکند. به زیرگرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود دارد **زیرگراف کامل** می‌گوییم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

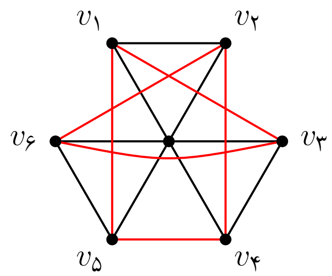
۱۹ اگر آقای مجری گراف زیر را به ببعی بدهد، ببعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

رأس‌های اطراف گراف را به ترتیب از v_1 تا v_6 نام‌گذاری می‌کنیم. رأس v_1 را در نظر می‌گیریم. در صورتی که همزمان یال‌های آن با رأس‌های $\langle v_3, v_4\rangle$ و یا $\langle v_5, v_6\rangle$ اضافه شود، زیرگراف کامل ۴ رأسی تشکیل می‌شود. در نتیجه حداکثر می‌توان ۲ یال از رأس v_1 اضافه کرد. همین استدلال را می‌توان برای رأس‌های v_2 تا v_6 نیز ارائه داد. در نتیجه حداکثر ۶ یال می‌توان به گراف اضافه نمود:



□

۲۰ گراف Q_n یک اَبَرمکعب ۲^n رأسی است که هر رأس آن نمایانگر یک رشته‌ی دودویی n رقمی می‌باشد و بین رأس‌هایی که رشته‌ی دودویی آن‌ها دقیقاً در یک رقم تفاوت دارند یال وجود دارد. اگر آقای مجری گراف Q_8 را به ببعی بدهد، ببعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟

۱) ۱۶۳۸۴ ۲) ۱۴۳۳۶ ۳) ۶۳۰۷ ۴) ۶۴۰۰ ۵) ۱۵۳۶۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

یک گراف n رأسی در صورتی که بیش از $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ یال داشته باشد، شامل دور به طول ۳ خواهد بود و همچنین گراف Q_n شامل $n \times 2^{n-1}$ یال است. در نتیجه حداکثر تعداد یال‌هایی که می‌توان به گراف اضافه کرد برابر است با:

$$\frac{2^{16}}{4} - 2^7 \times 8 = 15360$$

برای رسیدن به این بیشینه نیز کافی است رأس‌هایی که رشته‌ی متناظر با آن‌ها شامل تعداد زوجی رقم ۱ می‌باشند را در یک بخش و سایر رأس‌ها را در بخش دیگر قرار می‌دهیم. گراف حاصل دوبخشی است و می‌توانیم تمام یال‌هایی که بین دو بخش گراف وجود ندارند را اضافه کنیم. □