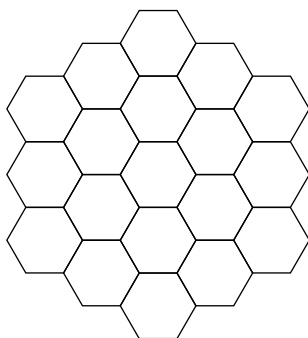


مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۶ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ می‌خواهیم خانه‌های شکل زیر را با رنگ‌های سفید و سیاه رنگ‌آمیزی کنیم. تلاطم یک رنگ‌آمیزی برابر با تعداد جفت خانه‌های هم‌رنگی است که یک ضلع مشترک دارند. کمترین میزان تلاطم که می‌توانیم با رنگ‌آمیزی جدول به دست آوریم چند است؟



۱۲ (۵)

۱۴ (۴)

۹ (۳)

۱۰ (۲)

۱۳ (۱)

۲ الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. آرایه‌ی A به طول n را ورودی بگیر.
۲. اگر آرایه‌ی A مرتب بود، به مرحله‌ی ۷ برو.
۳. دو آرایه‌ی $X = A[1 \dots \lfloor \frac{n}{3} \rfloor]$ و $Y = A[\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \dots n]$ را در نظر بگیر.
۴. عدد صحیح t را ورودی بگیر؛ اگر t عددی زوج بود، به مرحله‌ی ۶ برو.
۵. آرایه‌ی A را برابر با X و مقدار n را برابر با $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.
۶. آرایه‌ی A را برابر با Y و مقدار n را برابر با $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.
۷. آرایه‌ی A را خروجی بده.
۸. پایان.

منظور از $A[l \dots r]$ بازه‌ی l تا r از آرایه‌ی A (شامل خود l و r) است؛ برای مثال اگر $A = \langle 2, 1, 3, 5, 4 \rangle$ باشد $A[2 \dots 4] = \langle 1, 3, 5 \rangle$ می‌شود. اگر مقادیر t را به صورتی ورودی دهیم که طول آرایه‌ی نهایی بیشینه شود، به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد ۱ تا ۸ طول آرایه‌ی نهایی حداقل برابر با ۲ خواهد بود؟

۳۷۸۰۰ (۵)

۳۰۲۴۰ (۴)

۳۴۵۱۰ (۳)

۴۰۳۲۰ (۲)

۲۰۱۶۰ (۱)

۳ در شهر جادوگرها شش نفر زندگی می‌کنند که هرکدام از آن‌ها راستگو یا دروغگو هستند. افراد راستگو همواره راست و افراد دروغگو همواره دروغ می‌گویند. سِلتی می‌خواهد متوجه راستگو یا دروغگو بودن هرکدام از آن‌ها شود و در نتیجه از آن‌ها خواست اطلاعاتی در رابطه با خود و دیگران به او بدهند:

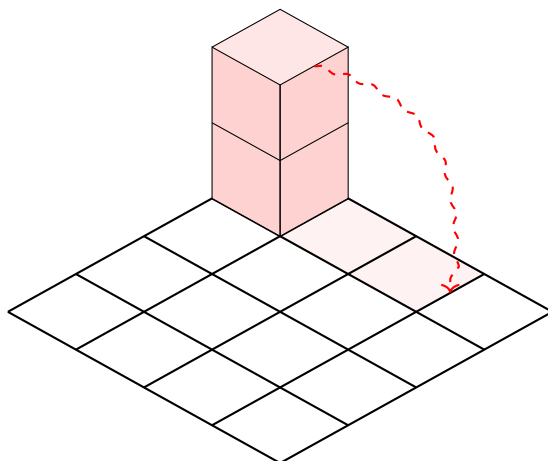
مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

- فرد $A : B$ دروغ می‌گوید.
- فرد B : حداقل یکی از A و C دروغ می‌گویند.
- فرد $C : A$ راست می‌گوید.
- فرد D : دقیقاً دو نفر راست می‌گویند.
- فرد $E : D$ دروغ می‌گوید.
- فرد F : دقیقاً سه نفر راست می‌گویند.

سلتی به چند طریق می‌تواند راستگو یا دروغگو بودن افراد را مشخص کند، به نحوی که تناقضی در گفته‌های هیچ‌کدام از آن‌ها وجود نداشته باشد؟

- ۱ (۵) ۴ (۴) ۵ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱)

یک شش‌وجهی صورتی $1 \times 1 \times 2$ داریم که در یکی از گوشه‌های جدول 4×4 مانند شکل زیر قرار دارد. در هر گام می‌توان آن را روی یکی از وجه‌هایش غلتاند (به شرطی که از جدول بیرون نزنند) و تمام خانه‌های زیر آن را به رنگ صورتی درآورد (یک خانه می‌تواند چندین بار رنگ‌آمیزی شود). در ابتدا تمام خانه‌های جدول به جز خانه‌ی زیرین شش‌وجهی سفید هستند. حداقل چند گام لازم داریم تا کل جدول را به رنگ صورتی درآوریم؟



- ۸ (۵) ۹ (۴) ۱۲ (۳) ۱۰ (۲) ۱۱ (۱)

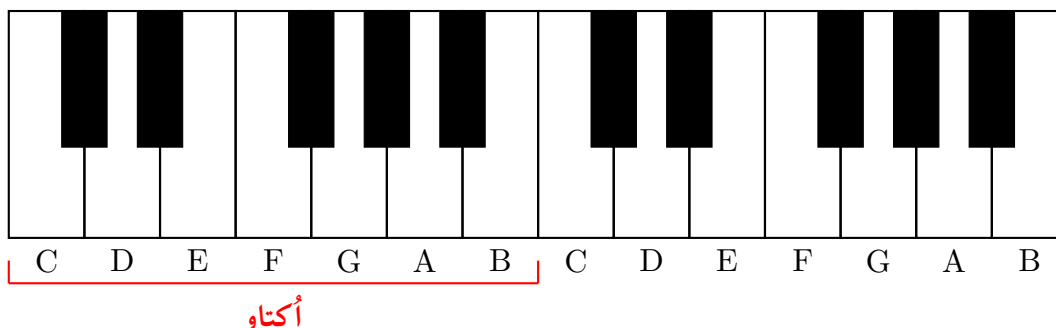
جدولی 2×3 داریم که در آن سه جفت A, B, C وجود دارند. فاصله‌ی منتهی دو خانه‌ی (x, y) و (x', y') برابر با $|x - x'| + |y - y'|$ است؛ برای مثال در جدول زیر اگر مختصات هر خانه از جدول را برابر با شماره‌ی سطر و ستون آن در نظر بگیریم، جمع فواصل منتهی این سه جفت برابر با $5 = 1 + 1 + 3$ می‌شود. به ازای تمام حالات چینش این سه جفت در جدول، امید ریاضی جمع فواصل منتهی این جفت‌ها چه قدر است؟

B	B	A
A	C	C

- ۶ (۵) ۱۰ (۴) ۵ (۳) $\frac{11}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۱)

مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

۶ صفحه کلید پیانو از هفت اکتاو با چینشی یکسان تشکیل می‌شود که کنار هم قرار می‌گیرند. هر اکتاو از دوازده کلید سیاه و سفید تشکیل می‌شود که در چینش استاندارد، این ترکیب از هفت کلید سفید و پنج کلید سیاه تشکیل شده است. در شکل زیر می‌توانید چینش دو اکتاو متوالی در صفحه کلید اصلی پیانو را ببینید:



به دلیل کوچک‌تر بودن کلیدهای سیاه و سختی فشردن آن‌ها، نمی‌توان دو کلید سیاه پشت سر هم در صفحه کلید داشت و باید بین هر دو کلید سیاه مجاور حداقل یک کلید سفید وجود داشته باشد. با توجه به این محدودیت، چند اکتاو معتبر به طول ۱۲ با تعداد کلیدهای سفید و سیاه دلخواه می‌توان ساخت که در کل صفحه کلید (در یک اکتاو یا بین دو اکتاو متوالی) هیچ دو کلید سیاه مجاوری وجود نداشته باشد؟

۱۴۴ (۵) ۳۲۲ (۴) ۲۸۸ (۳) ۲۳۳ (۲) ۳۷۷ (۱)

۷ هفت دیو با قدرت‌های $\{1, 5, 6, 8, 10, 12, 13\}$ و هفت انسان با قدرت‌های $\{2, 3, 4, 7, 9, 11, 14\}$ داریم. می‌دانیم در هر جنگ، هفت جفت انسان و دیو نبرد تن به تن می‌کنند و از هر جفت، فرد قدرتمندتر زنده می‌ماند. دو چینش در صورتی متمایزند که فردی وجود داشته باشد که رقیب او در این دو چینش متفاوت باشد. به ازای چند چینش اولیه، تعداد انسان‌هایی که زنده می‌مانند بیشترین مقدار ممکن است؟

۲۴ (۵) ۱۰۸ (۴) ۷۲ (۳) ۱۴۴ (۲) ۴۲۰ (۱)

۸ جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۰ را در نظر بگیرید که می‌توانیم عملیات زیر را به تعدادی دلخواه روی آن انجام دهیم: در هر مرحله عددی دلخواه از جایگشت که تا به حال آن را انتخاب نکرده‌ایم را از جایگشت حذف و سپس به انتهای آن اضافه می‌کنیم؛ برای مثال جایگشت زیر پس از انتخاب عدد ۹ (در صورتی که تا به حال انتخاب نشده باشد) بدین شکل تغییر می‌یابد:

$$\langle 4, 1, 6, 9, 2, 3, 5, 10, 7, 8 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, 6, 2, 3, 5, 10, 7, 8, 9 \rangle$$

تعداد جایگشت‌های اولیه‌ای که می‌توان با انجام دقیقاً پنج مرحله آن‌ها را تبدیل به یک جایگشت صعودی یا نزولی کرد چه قدر است؟

۱۵۱۲۰ (۵) ۶۰۴۸۰ (۴) ۳۰۴۹۲ (۳) ۳۰۲۴۰ (۲) ۶۰۲۲۸ (۱)

۹ برج سرداد ۵ طبقه دارد که در طبقه‌ی همکف لابی و در طبقات ۱ تا ۵ واحدهای مسکونی قرار دارند. در هر طبقه‌ی این برج ۵ نفر زندگی می‌کنند و آسانسور برج نیز ۵ نفر ظرفیت دارد. در یک روز عجیب به دلیل به صدا درآمدن آژیر خطر، همه‌ی ساکنین پشت در آسانسور طبقه‌ی خودشان در یک صف می‌ایستند تا به لابی بروند. همچنین قبل از این اتفاق آسانسور در طبقه‌ی ۵ بوده است.

مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

در هر مرحله آسانسور به سمت یکی از طبقات مورد نظر مدیر ساختمان حرکت می‌کند و به اندازه‌ی تعدادی که او مشخص کرده است افراد آن طبقه را از ابتدای صف سوار می‌کند. اگر آسانسور به لابی برسد، تمام افراد داخل آن پیاده می‌شوند و هیچ‌کس حق پیاده شدن در حین مسیر را ندارد. در هر طبقه، کسی که در اول صف قرار دارد و تابلوی طبقات آسانسور را می‌بیند به ازای هر باری که طبقه‌ی آن عوض می‌شود و او سوارش نیست یک واحد اعصابش خرد می‌شود. هدف مدیر ساختمان این است که مجموع اعصاب خردی اعضای برج کمینه شود. حداقل مجموع اعصاب خردی اعضای برج که مدیر ساختمان می‌تواند به آن برسد چقدر است؟

۴۵ (۱) ۵۵ (۲) ۷۵ (۳) ۵۰ (۴) ۷۰ (۵)

۱۰ پیکاسو نقاش مطرح سبک کوبیسم بود که توانایی نقاشی و رنگ‌آمیزی هر چیزی را داشت. او برای رنگ‌آمیزی درخت‌ها از دو اصل **عدم شلختگی** و **مهم‌مدم کسل‌کنندگی** پیروی می‌کرد:

- **عدم شلختگی:** هیچ رأسی نباید بیش از دو رنگ متفاوت در میان رأس‌های مجاورش داشته باشد.
- **عدم کسل‌کنندگی:** باید از بیشترین تعداد رنگ ممکن در رنگ‌آمیزی رأس‌ها استفاده شود.

چند درخت ده رأسی وجود دارد که پیکاسو آن‌ها را با توجه به اصول رنگ‌آمیزی خود با دقیقاً چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی می‌کند؟ دو درخت T_1 و T_2 متفاوت هستند، اگر و تنها اگر یالی مانند (u, v) در درخت T_1 بین دو رأس u و v وجود داشته باشد که در درخت T_2 قرار نداشته باشد.

۴۶۰۸۰ (۱) ۴۵۹۹۰ (۲) ۲۲۸۶۰ (۳) ۲۲۹۵۰ (۴) ۱۱۴۳۰ (۵)

۱۱ منظور از $f(x)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح x بر ۲ است؛ برای مثال $f(۱۵) = ۱$ و $f(۱۰) = ۰$ است. فرض کنید عددی صحیح مانند x داریم. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

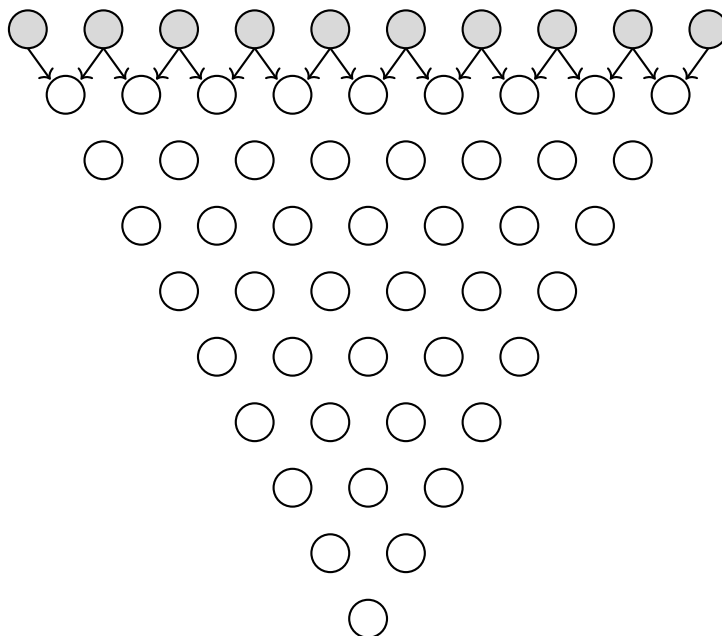
۱. مقدار k را برابر ۰ و مقدار $last$ را برابر ۱ - قرار بده.
۲. اگر $f(x) = ۰$ بود، به مرحله‌ی ۵ برو.
۳. اگر $last \neq ۱$ بود، مقدار k را یکی اضافه کن.
۴. مقدار $last$ را برابر ۱ قرار بده و به مرحله‌ی ۷ برو.
۵. اگر $last \neq ۰$ بود، مقدار k را یکی اضافه کن.
۶. مقدار $last$ را برابر ۰ قرار بده.
۷. مقدار x را برابر $\lfloor \frac{x}{k} \rfloor$ قرار بده.
۸. اگر $x > ۰$ بود، به مرحله‌ی ۲ برو.
۹. مقدار k را به عنوان خروجی اعلام کن.
۱۰. پایان.

اگر الگوریتم بالا را به ازای تمام مقادیر $۱۰۲۴ < x \leq ۰$ انجام دهیم و خروجی نهایی آن‌ها را با یکدیگر جمع کنیم، حاصل برابر با چه عددی است؟

۵۱۲۱ (۱) ۲۵۶۰ (۲) ۵۶۳۲ (۳) ۵۱۲۰ (۴) ۴۶۰۸ (۵)

مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

۱۲ در شکل زیر، ابتدا خانه‌های بالاترین سطر را با اعداد ۰، ۱ یا ۲ پر می‌کنیم و سپس هر خانه از سطرهاى دیگر برابر مجموع دو خانه‌ی بالایی‌اش می‌شود. به ازای چند حالت مقداردهی اعداد بالاترین سطر، مجموع اعداد آن و همچنین عدد نهایی خانه‌ی پایین هرم هردو مضربی از ۳ می‌شوند؟



۱۹۶۸۳ (۵)

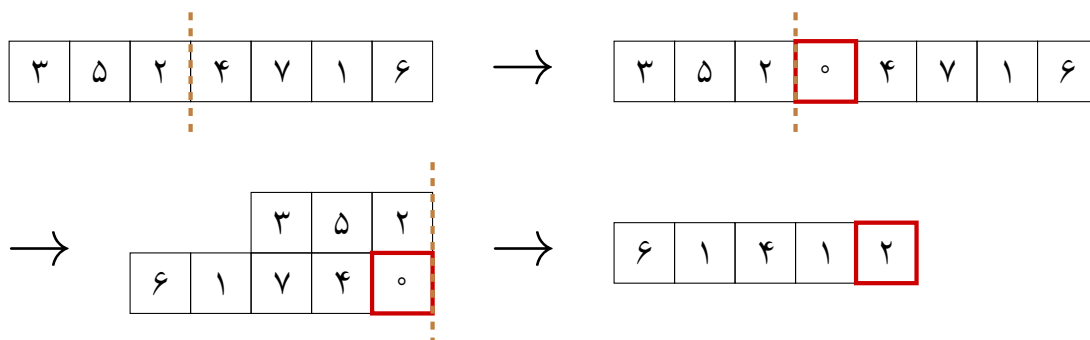
۷۶۸ (۴)

۲۳۰۴ (۳)

۶۵۶۱ (۲)

۱۵۳۶ (۱)

۱۳ نواری به طول ۷ داریم که در ابتدا روی آن اعداد ۱ تا ۷ نوشته شده‌اند. عمل تازا را بدین شکل تعریف می‌کنیم؛ ابتدا خطی دلخواه میان دو خانه‌ی مجاور از نوار انتخاب می‌کنیم. سپس یک خانه‌ی جدید با عدد صفر به سمت راست خط اولیه اضافه می‌کنیم. در ادامه نوار را از خط اولیه تا می‌کنیم و به جای مقادیر خانه‌هایی که روی هم قرار گرفته‌اند، مقدار یای انحصاری (XOR) آن دو خانه را قرار می‌دهیم:



عملیات یای انحصاری دو عدد را در مبنای ۲ نظر می‌گیرد و هر رقمی که در این دو عدد متفاوت است، در حاصل برابر یک و باقی رقم‌ها برابر صفر خواهند بود؛ برای مثال حاصل یای انحصاری ۳ و ۵ برابر ۶ است:

$$3 \oplus 5 = 011_2 \oplus 101_2 = 110_2 = 6$$

مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

عملیات تازا را می‌توان آنقدر روی آرایه انجام داد که طول آن برابر با ۲ شود. اگر قدرت تازایی یک آرایه را برابر حداکثر مقدار جمع دو عدد انتهایی آن پس از تعدادی حرکت دلخواه تعریف کنیم، جمع قدرت تازایی تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۷ چند است؟

- (۱) ۴۰۳۲۰ (۲) ۳۲۲۵۶ (۳) ۷۰۵۶۰ (۴) ۱۶۱۲۸ (۵) ۳۵۲۸۰

۱۴ باب اسفنجی ۳۵ همبرگر تهیه کرده است که تمامی آن‌ها را می‌خواهد سرخ کند. سرخ شدن دو سمت هر همبرگر در مجموع ۱۴۰۴ ثانیه طول می‌کشد؛ یعنی اگر سمت زیرین همبرگر i ام به t_i ثانیه برای سرخ شدن نیاز داشته باشد، سمت دیگر آن به $1404 - t_i$ ثانیه نیاز دارد. باب اسفنجی مقادیر t_i را می‌داند و متوجه شده است که تمامی آن‌ها عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۱۴۰۴ هستند.

در ابتدا باب اسفنجی هرکدام از ۳۵ همبرگر را به طور همزمان از سمت دلخواه خود روی اجاق می‌گذارد و به شستن ظرف‌ها می‌پردازد. همچنین باب اسفنجی نباید هیچ سمتی از همبرگرها را بسوزاند؛ برای همین می‌تواند هر زمانی که دلش می‌خواهد از ظرف شستن دست بکشد و یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از همبرگرها را انتخاب و در زمانی ناچیز برگرداند تا سمت دیگر آن به سرخ شدن ادامه دهد. حداقل تعداد بارهایی که او لازم دارد تا قبل از پخته‌شدن همبرگرها دست از ظرف شستن بردارد تا بتواند آن‌ها را بدون سوزاندن حاضر کند چه قدر است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۳۵ (۵) ۱۲

۱۵ یک جدول 3×3 داریم که در یکی از خانه‌های آن موشی کور پنهان شده است. به هر سه خانه‌ای از جدول که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند یک قطر پراکنده و به هر سه خانه‌ای از جدول که در یک سطر، ستون یا قطر پراکنده باشند یک گروه می‌گوییم. هدف آن است که در کمترین تعداد مرحله موش کور را پیدا کنیم. در هر مرحله یکی از خانه‌های دلخواه جدول مانند A را بازبینی می‌کنیم و اگر موش کور در آن‌جا بود او را دستگیر می‌کنیم. در غیر این صورت اگر موش کور در خانه‌ای مانند B باشد، پس از اتمام بازبینی فرار کرده و به خانه‌ی هم‌گروهی A و B می‌رود. حداقل تعداد مراحل لازم برای دستگیری موش کور چند است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵) نمی‌توان با یک روش قطعی موش کور را دستگیر کرد.

حمید یک جدول 3×3 دارد که هر خانه‌ی آن با دقیقاً یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی شده است. رنگ محبوب یک سطر یا ستون، رنگی است که در آن سطر یا ستون بیشتر از رنگ دیگر تکرار شده است. حمید جدول را به ما نشان نمی‌دهد، اما رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها را به ما می‌گوید. عدد ابهام اطلاعات حمید برابر تعداد رنگ‌آمیزی‌های ممکن از جدول است که با اطلاعاتی که به ما داده است، سازگاری داشته باشد.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۶ اگر حمید بگوید رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها سیاه است، عدد ابهام اطلاعات داده شده چه مقداری است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۵ (۴) ۳۳ (۵) ۶

۱۷ به ازای چند حالت از اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد، عدد ابهام برابر صفر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۷ (۵) ۱۴

مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

بیشترین عدد ابهام اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد برابر چه مقداری است؟

۱۸

۲۵ (۵)

۳۴ (۴)

۴۲ (۳)

۶۴ (۲)

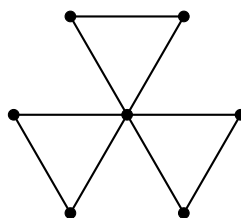
۵۴ (۱)

آقای مجری یک گراف به بیعی می‌دهد و از او می‌خواهد که بیشترین تعداد یال را به گراف اضافه کند، به طوری که همچنان ساده بماند و اندازه‌ی بزرگ‌ترین زیرگراف کامل آن تغییری نکند. به زیرگرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود دارد زیرگراف کامل می‌گوییم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ اگر آقای مجری گراف زیر را به بیعی بدهد، بیعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟

۱۹



۸ (۵)

۹ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۲۰ گراف Q_n یک ابرمکعب 2^n رأسی است که هر رأس آن نمایانگر یک رشته‌ی دودویی n رقمی می‌باشد و بین رأس‌هایی که رشته‌ی دودویی آن‌ها دقیقاً در یک رقم تفاوت دارند یال وجود دارد. اگر آقای مجری گراف Q_8 را به بیعی بدهد، بیعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟

۲۰

۱۵۳۶۰ (۵)

۶۴۰۰ (۴)

۶۳۰۷ (۳)

۱۴۳۳۶ (۲)

۱۶۳۸۴ (۱)