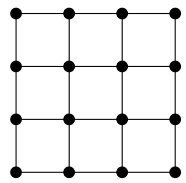
مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

نام و نام خانوادگی:

۱ دستگاهی داریم که یک عدد دودویی ۹ رقمی روی نمایش‌گر آن دیده می‌شود. در ابتدا این عدد برابر ۰۰۰۱۰۱۱۰۱ یا همان ۴۵ است. این دستگاه دکمه‌ای دارد که اگر آن را فشار دهیم، عدد روی نمایش‌گر یک واحد زیاد می‌شود. آن قدر دکمه را می‌زنیم تا به نمایش دودویی عدد ۴۲۳ برسیم. هر کدام از این ۹ رقم در طول مراحل چندین بار تغییر کرده‌اند. مجموع تعداد این تغییرها چند تاست؟

۱) ۷۴۸ ۲) ۷۵۳ ۳) ۷۴۴ ۴) ۷۵۱ ۵) ۷۵۴

۲ در گراف زیر حداقل چند یال باید حذف کنیم تا طول هیچ دوری بیش از چهار نباشد؟



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۶ ۵) ۸

۳ یک جدول ۴ × ۴ داریم و می‌خواهیم هر یک از خانه‌های آن را با سیاه یا سفید رنگ کنیم. یک خانه را **امن** گوییم، اگر در ستون اوّل، ستون آخر و سطر پایین نباشد و هم‌چنین هر سه خانه‌ی مجاور چپ، راست و پایین آن سیاه باشند. به چند طریق می‌توان خانه‌های جدول را رنگ‌آمیزی کرد، طوری که خانه‌ی امن نداشته باشیم؟

۱) ۳۱۶۸۴ ۲) ۱۷۸ ۳) ۱۹۳۲۱ ۴) ۲۲۵۰۰ ۵) $۲^{۱۲}$

۴ در مغازه‌ی گل‌فروشی دو گل قرمز، دو گل بنفش و دو گل زرد در یک ظرف دربسته قرار دارد. مرتضی طبق روال زیر، یک گل برای خود می‌خرد:

> ابتدا رنگ دل‌خواهش را قرمز انتخاب می‌کند و تصمیم می‌گیرد یک گل قرمز بخرد. سپس یک گل به تصادف از ظرف برمی‌دارد. اگر گل برداشته شده به رنگ دل‌خواهش بود، آن را می‌خرد و کار تمام می‌شود؛ در غیر این صورت رنگ دل‌خواهش را به رنگ آن گل تغییر می‌دهد و گل را به ظرف برمی‌گرداند. دوباره یک گل به تصادف از ظرف برمی‌دارد و همین روند تکرار می‌شود تا بالأخره یک گل خریده شود.

مرتضی به چه احتمالی گل قرمز خواهد خرید؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ ۵) $\frac{۳}{۵}$

۵ ۱۰۰ زیرجدول ۱۰۰ × ۱۰۰ متمایز در یک جدول ۲۰۰ × ۲۰۰ داریم. حداکثر چند خانه از جدول در تمام این زیرجدول‌ها هستند؟

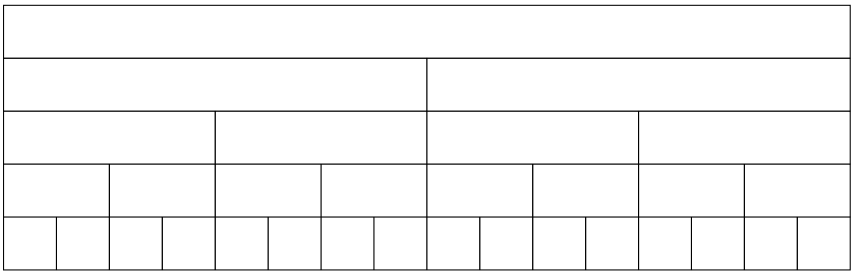
۱) ۶۴۰۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۸۱۰۰ ۴) ۱۰۰ ۵) ۸۲۸۱

نام و نام خانوادگی:

۶ ۱۰۰ زیرجدول ۱۰۰ $\times$ ۱۰۰ متمایز در یک جدول ۲۰۰ $\times$ ۲۰۰ داریم. حداکثر چند خانه از جدول هستند که در دقیقن ۹۹ تا از این زیرجدول‌ها آمده باشند؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۸۲۸۱ ۳) ۸۱۰۰ ۴) ۹۰۰۰ ۵) ۶۴۰۰

۷ دیوار زیر را در نظر بگیرید:



این دیوار از تعدادی آجر تشکیل شده است. به جز آجرهای سطر پایین، زیر هر کدام از آجرها دو آجر کوچک‌تر وجود دارد که آن‌ها را **فرزندان** آجر گفته شده می‌نامیم. در هر یک از شرایط زیر، گوییم آجر X به آجر Y راه دارد:

۱. Y فرزند X باشد.
۲. هر دو آجر در یک سطر بوده و مرز مشترک داشته باشند.
۳. هر دو آجر در یک سطر بوده و یکی در انتها و دیگری در ابتدای سطر باشد.

حال می‌خواهیم از آجر بالای دیوار شروع کنیم، هر مرحله به یک آجر که به آن راه داریم، برویم و کار را در یکی از آجرهای سطر پایین تمام کنیم. ممکن است در این مسیر، چند آجر از سطر پایین ببینیم و لزومن به محض رسیدن به سطر پایین، کار را تمام نمی‌کنیم. هم‌چنین تنها دنباله‌ی آجرها در مسیر مهم است و نحوه‌ی رفتن آن‌ها به یک‌دیگر مهم نیست. برای مثال دو آجر سطر دوم (از بالا) را در نظر بگیرید. این دو هم به دلیل شرط (۲) و هم به دلیل شرط (۳) به هم راه دارند. حال اگر در مسیری، از یکی از آن‌ها به دیگری برویم، مهم نیست از شرط (۲) استفاده کرده‌ایم یا شرط (۳). هم‌چنین با توجّه به شرایط گفته شده، امکان حرکت رو به بالا وجود ندارد. چند مسیر به شکل گفته شده وجود دارد، طوری که از هر آجر حداکثر یک بار بگذریم؟

۱) ۳۲۵۵×۲^{۴} ۲) ۳۲۵۵×۲^{۵} ۳) $۲^{۱۷}$ ۴) ۳۲۵۵×۲ ۵) $۲^{۱۴}$

۸ یک گراف کامل ۱۱ رأسی با رأس‌های ۰، ۱، ... و ۱۰ داریم. روی یال بین رأس‌های i و j مقدار باقی‌مانده‌ی $i+j$ در تقسیم بر ۱۱ را نوشته‌ایم. **عدد** یک مسیر را کم‌ترین عدد در میان یال‌های آن مسیر می‌نامیم. دو رأس دل‌خواه در نظر بگیرید. بیشینه‌ی عدد مسیر را در میان مسیرهای بین این دو رأس، میزان **دوستی** این دو رأس می‌نامیم. می‌خواهیم یک زیرگراف فراگیر از گراف داده شده انتخاب کنیم، طوری که میزان دوستی هر دو رأس در زیرگراف برابر با میزان دوستی‌شان در گراف اصلی باشد. کمینه‌ی ممکن مجموع اعداد یال‌های این زیرگراف چیست؟

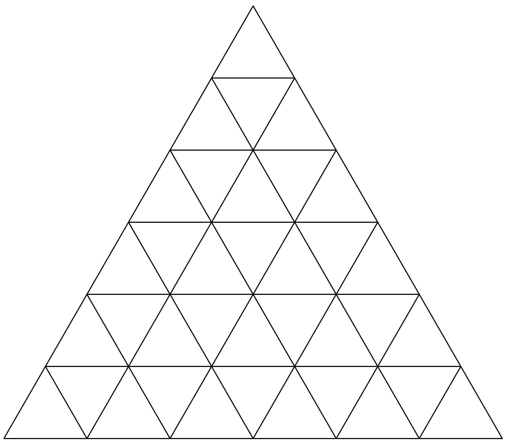
۱) ۲۷۰ ۲) ۵ ۳) ۹۵ ۴) ۱۰۱ ۵) ۲۷۵

نام و نام خانوادگی:

۹ فرض کنید ABC یک مثلّث متساوی‌الاضلاع باشد. **مکمّل** این مثلّث به شکل زیر ساخته می‌شود:

یک رأس مثلّث را انتخاب می‌کنیم. برای مثال فرض کنید رأس A انتخاب شود. B و C را نسبت به A قرینه می‌کنیم تا نقاط B' و C' به دست آیند. مثلّث $AB'C'$ را مکمّل مثلّث ABC می‌نامیم.

توجه کنید یک مثلّث متساوی‌الاضلاع در صفحه دارای سه مکمّل است. حال یک مثلّث متساوی‌الاضلاع در صفحه در نظر بگیرید. هر ضلع آن را به n بخش برابر تقسیم کنید و با کشیدن خطوط موازی با اضلاع، درون مثلّث را به $n^۲$ مثلّث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم کنید. به مثلّث حاصل، یک **مثلّث مشبّک** n **تایی** گفته می‌شود. برای مثال شکل زیر یک مثلّث مشبّک شش تایی است:



به هر کدام از $n^۲$ مثلّث کوچک، **مثلّثک** می‌گوییم. گوییم مثلّثک P با مثلّثک Q **ارتباط** دارد، اگر بتوانیم از P شروع کرده، در هر مرحله به یک مثلّثک مکمّل برای مثلّثک فعلی برویم و در انتها به Q برسیم. توجه کنید در حین این مسیر نباید از مثلّث اصلی خارج شویم و تنها می‌توانیم از مثلّثک‌ها استفاده کنیم.
یک مثلّث مشبّک ۳۰ تایی در نظر بگیرید. می‌خواهیم تعدادی مثلّثک انتخاب کنیم، طوری که هر مثلّثک دیگر با دست کم یکی از مثلّثک‌های انتخاب شده ارتباط داشته باشد. کمینه‌ی تعداد مثلّثک‌هایی که باید انتخاب کنیم، چیست؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۶

۱۰ در ابتدا یک باکتری و یک لانه داریم. در هر مرحله هر باکتری می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد:

- یک لانه بسازد.
- درون یک لانه‌ی خالی برود و تکثیر شود؛ یعنی به دو باکتری تبدیل شود.

توجّه کنید در یک مرحله، در هر لانه حداکثر یک باکتری می‌تواند قرار بگیرد و تکثیر شود. پس از هفت مرحله، بیشینه‌ی ممکن تعداد باکتری‌ها چیست؟

۱) ۲۹ ۲) ۲۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶ ۵) ۳۴

نام و نام خانوادگی:

۱۱ سلطان n دست‌کش، n کلاه و n شال‌گردن دارد. هر کدام از دست‌کش‌ها، کلاه‌ها و شال‌گردن‌ها به یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز هستند. او می‌خواهد n دست لباس زمستانی بسازد (هر دست شامل یک دست‌کش، یک کلاه و یک شال‌گردن است). **امتیاز** هر دست لباس، به اندازه‌ی تعداد رنگ‌هایی است که در آن به کار رفته است. برای مثال یک دست لباس شامل یک دست‌کش آبی، یک کلاه قرمز و یک شال‌گردن آبی دو امتیاز دارد. هدف سلطان، بیشینه کردن مجموع امتیاز n دست لباس است.
ایلیچ به سلطان برای ساختن n دست لباس، الگوریتم زیر را پیشنهاد داده است:

> تا زمانی که می‌توانیم با دست‌کش‌ها، کلاه‌ها و شال‌گردن‌های موجود یک دست لباس ۳ امتیازی دل‌خواه می‌سازیم. سپس تا زمانی که می‌توانیم یک دست لباس ۲ امتیازی دل‌خواه می‌سازیم و در انتها دست‌های ۱ امتیازی تشکیل می‌دهیم.

از میان گزاره‌های زیر، کدام گزاره یا گزاره‌ها صحیح هستند؟

آ) الگوریتم ایلیچ همواره سلطان را به هدف‌ش می‌رساند؛ یعنی بیشینه‌ی مجموع امتیاز ممکن را می‌سازد.
ب) اگر در میان $۳n$ عنصر موجود از هر رنگ n عنصر داشته باشیم، می‌توان n دست لباس با مجموع امتیاز $۳n$ ساخت.
ج) اگر در میان $۳n$ عنصر موجود از هر رنگ n عنصر داشته باشیم، الگوریتم ایلیچ بیشینه‌ی مجموع امتیاز ممکن را می‌سازد.
د) اگر دست ۳ امتیازی قابل ساخت نباشد و هم‌چنین دست‌کش‌ها از دقیقن دو رنگ، کلاه‌ها از دقیقن دو رنگ و شال‌گردن‌ها نیز از دقیقن دو رنگ باشند، می‌توان نتیجه گرفت که $۳n$ عنصر موجود دقیقن از دو رنگ هستند.

۱) هیچ کدام از گزاره‌ها ۲) گزاره‌های ب، ج و د ۳) گزاره‌های ب و د ۴) فقط گزاره‌ی د ۵) تمام گزاره‌ها

یک جدول $n \times n$ داریم. دو خانه از این جدول را **مجاور** گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. ابتدا در هر یک از خانه‌های سطر پایین جدول یک مهره قرار گرفته است. در هر مرحله هر مهره می‌تواند ساکن بماند و یا به یک خانه‌ی مجاور برود. توجّه کنید قرار گرفتن بیش از یک مهره در یک خانه مشکلی ندارد. در پایان باید در هر یک از خانه‌های سطر بالای جدول یک مهره قرار گرفته باشد. می‌خواهیم کمینه‌ی تعداد مراحل لازم برای این کار را بیابیم، طوری که در حین مراحل، هر دو مهره در دست کم یک مرحله در یک خانه بوده باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ پاسخ مسئله به ازای $n = ۱۱$ چیست؟

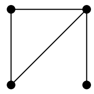
۱) ۲۱ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰ ۵) ۳۳

۱۳ پاسخ مسئله به ازای $n = ۱۰$ چیست؟

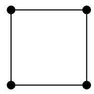
۱) ۲۷ ۲) ۱۱ ۳) ۹۹ ۴) ۱۸ ۵) ۱۹

نام و نام خانوادگی:

یک گراف ساده را **سلطانی** گوییم، اگر اختلاف درجه‌ی هیچ دو رأس آن برابر یک نباشد. برای مثال گراف زیر سلطانی نیست، زیرا هم رأس با درجه‌ی یک و هم رأس با درجه‌ی دو دارد:



توجه کنید در یک گراف سلطانی، وجود دو رأس با درجه‌ی برابر مشکلی ندارد. برای مثال، گراف زیر سلطانی است:



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ یک گراف ساده‌ی ۱۱ رأسی سلطانی داریم که کامل نیست. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۴۹   ۲) ۵۳   ۳) ۵۲   ۴) ۴۵   ۵) ۵۴

۱۵ یک گراف ساده‌ی ۱۱ رأسی سلطانی داریم. در این گراف هیچ سه رأسی وجود ندارد که دو به دو به هم وصل باشند. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۶   ۲) ۲۹   ۳) ۲۸   ۴) ۲۷   ۵) ۳۰

---

۲۲ نفر می‌خواهند با هم فوتبال بازی کنند. آن‌ها برای این کار باید به دو تیم ۱۱ نفری غیر نشان‌دار تقسیم شوند. منظور از غیر نشان‌دار این است که تیم‌ها نام و شماره‌ی اعضا ندارند. در حقیقت، تنها هم‌تیمی بودن و نبودن افراد مهم است. هر یک از این ۲۲ نفر به یک نفر دیگر علاقه دارد. به فرد مورد علاقه، **محبوب** او نیز می‌گوییم.
طبیعی است که رابطه‌ی محبوب بودن لزومن دوطرفه نیست! هر یک از این ۲۲ نفر از یک نفر دیگر متنفّر است. به فرد مورد تنفّر، **منفور** او نیز می‌گوییم. بالطّبع رابطه‌ی تنفّر نیز لزومن دوطرفه نیست!
طبیعی است که کسی محبوب یا منفور خودش نیست! هم‌چنین یک نفر می‌تواند محبوب یا منفور بیش از یک نفر باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ می‌خواهیم تیم‌کشی طوری انجام شود که هیچ کس با منفورش هم‌تیم نباشد. در میان تمام حالات برای روابط افراد، کمینه و بیشینه‌ی تعداد حالات تیم‌کشی به ترتیب چیست؟

۱) ۱ و ۱   ۲) ۰ و 2^{11} ۳) ۱ و 2^{11} ۴) ۰ و ۱   ۵) ۰ و 2^{10}

نام و نام خانوادگی:

۱۷ می‌خواهیم تیم‌کشی طوری انجام شود که هر کس با محبوب‌ش هم‌تیم باشد. در میان تمام حالات برای روابط افراد، بیشینه‌ی تعداد حالات تیم‌کشی چیست؟

۱) ۷۰ ۲) ۰ ۳) ۲۴ ۴) ۷۲۰ ۵) ۲۵۲

محسن یک دیگ بزرگ برنج و یک قاشق دارد. به او گفته می‌شود که تعدادی روز فرصت دارد تا برنج بخورد. تعداد دقیق روزها به محسن گفته نمی‌شود، امّا به او گفته می‌شود این تعداد از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است. به عبارت دقیق‌تر محسن به احتمال $\frac{۱}{n}$ دقیقن یک روز فرصت دارد، به احتمال $\frac{۱}{n}$ دقیقن دو روز فرصت دارد، ... و به احتمال $\frac{۱}{n}$ دقیقن n روز فرصت دارد. محسن در هر روز می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد:

- تعداد قاشق‌هایش را دو برابر کند.
- هر قاشق‌ش را پر از برنج کند و بخورد.

هر گاه فرصت محسن تمام شود، به او گفته می‌شود که پایان کار فرا رسیده است! محسن می‌خواهد روشی را در پیش بگیرد که امید ریاضی مجموع میزان برنجی که می‌خورد بیشینه شود. به عبارت دیگر او می‌خواهد روشی در پیش گیرد که به طور میانگین در میان n حالت موجود (برای تعداد روزهایی که فرصت دارد)، بیش‌ترین میزان برنج خورده شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۸ فرض کنید $n = ۴$ باشد؛ یعنی به محسن گفته می‌شود تعداد روزهای فرصت‌ش از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است. بیشینه‌ی امید ریاضی گفته شده چند قاشق برنج است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۷}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۴ ۵) ۸

۱۹ فرض کنید $n = ۲۰$ باشد؛ یعنی به محسن گفته می‌شود تعداد روزهای فرصت‌ش از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ است. بیشینه‌ی امید ریاضی گفته شده چند قاشق برنج است؟

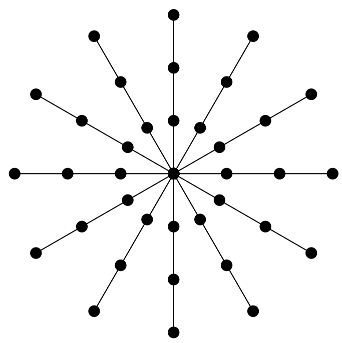
۱) $۲^{۱۹}$ ۲) $\frac{۲۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵} \times ۲^{۱۵}$ ۴) $۲^{۱۵}$ ۵) $\frac{۳}{۵} \times ۲^{۱۶}$

فرض کنید یک گراف ساده‌ی همبند داریم. **فاصله**‌ی دو رأس در گراف، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌هاست. **استادِ بزرگ** یکی از رأس‌های گراف را در ذهن خود انتخاب می‌کند و ما باید آن رأس را پیدا کنیم. ما در هر مرحله می‌توانیم یک رأس گراف را به استاد بزرگ بدهیم و او فاصله‌ی رأس ما تا رأس خودش را می‌گوید. کمینه‌ی تعداد مراحلی که لازم داریم تا به طور تضمینی بتوانیم رأس استاد بزرگ را پیدا کنیم، **عدد گراف** می‌نامیم. لزومی ندارد در روند یافتن رأس استاد بزرگ، فاصله‌ی خود این رأس نیز از استاد بزرگ پرسیده شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

نام و نام خانوادگی:

۲۰ عدد گراف زیر چیست؟



۱) ۱۱   ۲) ۱۲   ۳) ۱۳   ۴) ۱۰   ۵) ۹

۲۱ تمام گراف‌های ساده‌ی همبند را در نظر بگیرید که دقیقن ۱۰۰ رأس و ۱۰۰ یال دارند. کمینه و بیشینه‌ی عدد گراف در میان گراف‌های گفته شده به ترتیب چیست؟

۱) ۱ و ۹۷   ۲) ۲ و ۹۸   ۳) ۲ و ۹۷   ۴) ۱ و ۹۸   ۵) ۱ و ۹۹

۲۲ یک گراف ۱۳۹۶ رأسی با رأس‌های ۱، ۲، ... و ۱۳۹۶ داریم. در این گراف، دو رأس با شماره‌های i و j به هم وصل هستند، اگر و تنها اگر $|i - j| \leqslant 10$ باشد. عدد این گراف چیست؟

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۱۱   ۵) ۱۴۰

فرض کنید یک جدول داریم. دو خانه از جدول را **مجاور** گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به یک مجموعه از خانه‌های جدول **همبند** گوییم، اگر به ازای هر دو خانه‌ی آن مانند x و y بتوانیم از x شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور از آن مجموعه برویم و پس از تعدادی مرحله به y برسیم. می‌خواهیم خانه‌های جدول را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم، طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

- خانه‌های هر رنگ، یک مجموعه‌ی همبند تشکیل بدهند.
- شکل حاصل از خانه‌های سیاه و شکل حاصل از خانه‌های سفید، هم‌نهشت (قابل انطباق در صفحه با عملیّات‌های انتقال، دوران و تقارن) باشند.

هدف ما پیدا کردن تعداد روش‌های انجام این رنگ‌آمیزی است. در این دسته سؤال، دو رنگ‌آمیزی را که با دوران، تقارن و اعمال مشابه از روی هم به دست بیایند، متفاوت در نظر می‌گیریم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳ تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را در یک جدول ۲ × ۸ بیابید.

۱) ۱۴   ۲) ۱۲   ۳) ۱۶   ۴) ۸   ۵) ۶

نام و نام خانوادگی:

۲۴ تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را در یک جدول ۴×۴ بیابید.

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) ۳۶ ۴) ۵۲ ۵) ۴۴

۲۵ این بار فرض کنید یک مکعّب $۲ \times ۲ \times ۲$ داریم. دو مکعّب واحد را **مجاور** گوییم، اگر یک وجه مشترک داشته باشند. به یک مجموعه از مکعّب‌های واحد **همبند** گوییم، اگر به ازای هر دو مکعّب واحد آن مانند x و y بتوانیم از x شروع کرده، در هر مرحله به یک مکعّب واحد مجاور از آن مجموعه برویم و پس از تعدادی مرحله به y برسیم. می‌خواهیم مکعّب‌های واحد را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم، طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

- مکعّب‌های واحد هر رنگ، یک مجموعه‌ی همبند تشکیل بدهند.
- شکل حاصل از مکعّب‌های واحد سیاه و شکل حاصل از مکعّب‌های واحد سفید، هم‌نهشت (قابل انطباق در فضا با عملیّات‌های انتقال، دوران و تقارن) باشند.

تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را بیابید.

۱) ۴۰ ۲) ۳۲ ۳) ۲۶ ۴) ۱۴ ۵) ۳۸