مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اوّل)

مسئله‌ی ۱: وزنه‌ها ..... ۱۰ امتیاز

n عدد وزنه‌ی متفاوت با وزن‌های $۲^۰$، $۲^۱$، ...، تا $۲^{n-۱}$ (از هر کدام یک عدد)، و یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. وزن هر وزنه بر روی آن نوشته شده‌است. در ابتدای کار، هیچ وزنه‌ای روی ترازو قرار ندارد. در هر حرکت یکی از وزنه‌هایی که روی ترازو نیست را برداشته و روی یکی از کفه‌های ترازو قرار می‌دهیم؛ پس از این کار، اگر کفه‌ی سمت چپ ترازو پایین‌تر بود (سنگین‌تر بود)، حرف L و اگر کفه‌ی سمت راست ترازو پایین‌تر بود، حرف R را روی کاغذ می‌نویسیم. (می‌توان نشان داد که کفه‌ها هیچ‌وقت مساوی نمی‌شوند!) این کار را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. دقت کنید حروف را به ترتیب پشت سر هم می‌نویسیم. هم‌چنین توجه کنید که هرگز حق نداریم وزنه‌ای را از روی یک کفه برداریم. با این حساب وقتی وزنه‌ای روی یک کفه قرار گرفت تا پایان کار همان‌جا باقی می‌ماند.

در پایان کار، یعنی زمانی که همه وزنه‌ها روی ترازو قرار گرفتند، یک رشته به طول n از حروف L و R ایجاد می‌شود. ثابت کنید که به‌ازای هر رشته به طول n از L و R، می‌توان وزنه‌ها را به ترتیبی روی ترازو قرار داد که رشته مورد نظر ساخته شود.

مسئله‌ی ۲: نوارهای دودویی سارا ..... ۲۰ امتیاز

سارا علاقه‌ی زیادی به نمایش اعداد در مبنای ۲ دارد! یک روز صبح، او تمام اعداد ۰ تا $۲^n - ۱$ را روی ۲^n عدد نوارِ کاغذی، در مبنای ۲ می‌نویسد و در سمت چپ اعدادی که کم‌تر از n رقمِ دودویی (اصطلاحاً «بیت») دارند، آن‌قدر صفر می‌گذارد تا تمام اعداد دقیقاً n بیتی بشوند.

عصر همان روز، دارا (برادر سارا)، نوارهای او را برداشته و به اتاق خودش می‌رود. سپس، دور از چشم سارا، ابتدا نوارها را با یک ترتیب دل‌خواه زیر هم قرار می‌دهد (تا چیزی شبیه یک جدول با ۲^n سطر و n ستون از ارقام ۰ یا ۱ درست شود)؛ و بعد از آن روی هر کدام از $۲^n \times n$ بیتِ این نوارها، یک سکّه قرار می‌دهد تا بیتِ زیر آن دیده نشود. پس از این کار، دارا از سارا می‌خواهد که به اتاقش بیاید و با برداشتن حداقل تعداد سکّه از روی بیت‌های نوارها، تعیین کند که نوارِ هر کدام از سطرها، دقیقاً کدام‌یک از اعدادِ ۰ تا $۲^n - ۱$ اوّلیه است.

بعد از کمی فکر کردن، سارا تمام سکّه‌های همه‌ی نوارها به‌جز نوار آخر را بر می‌دارد (تا اعداد آن‌ها را به‌سادگی ببیند) و سپس نتیجه می‌گیرد که بیت‌های زیرِ سکّه‌هایِ آخرین نوار، عددی از اعدادِ ۰ تا $۲^n - ۱$ را تشکیل می‌دهند که در نوارهای دیگر نیامده است! دارا که چندان از ایده‌ی سارا خوشش نیامده، از او می‌خواهد که سعی کند با برداشتن تعداد کم‌تری سکّه، ماهیت همه‌ی نوارها را تشخیص دهد.

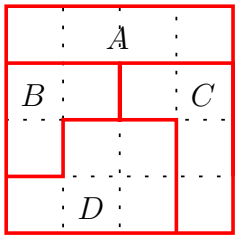
به سارا کمک کنید و روشی ارائه دهید که برای هر $n \geq ۲$، او بتواند با برداشتن حداکثر $۱ + ((n-۱) \times ۲^n)$ سکه، تمام نوارها را به‌طور دقیق شناسایی کند.

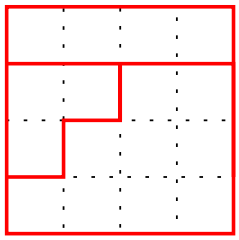
مسئله‌ی ۳: خانه‌های تک‌رنگ ..... ۲۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ از اعداد ۱، ۲، تا n... داده شده است. در هیچ سطر یا ستونی از این جدول عدد تکراری یافت نمی‌شود؛ به عبارت دیگر، در هر سطر یا ستون تمام اعداد ۱، ۲، تا n... وجود دارند.

اگر x یک عدد اعشاری باشد، $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحِ کوچک‌تر از x است. با این تعریف، ثابت کنید که می‌توان $[\frac{n}{۲}]$ تا از خانه‌های این جدول را انتخاب نمود به‌طوری‌که اوّلاً، هیچ زوج از این خانه‌ها در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند. ثانیاً، هیچ زوج از این خانه‌ها شامل عدد یک‌سانی نباشد.

مسئله‌ی ۴: برش نواحی ..... ۲۵ امتیاز





یک جدول $n \times n$ در اختیار داریم. در ابتدا جدول از n^2 ناحیه تشکیل شده است (n^2 مربع 1×1). در هر مرحله می‌توانیم **تمام** دو ناحیه‌ی مجاور (یعنی دو ناحیه که لااقل یک پاره‌خط مشترک دارند) را از جدول انتخاب کنیم و این دو ناحیه را با هم ادغام کنیم؛ یعنی مرز مشترک بین این دو ناحیه را پاک کنیم. فرض کنید طول این مرز مشترک در مرحله‌ی i ام a_i باشد. اگر بعد از k مرحله، تنها یک ناحیه باقی بماند (یعنی یک مربع $n \times n$)، اعداد $a_1, \ldots, a_k$ به‌دست می‌آیند. برای مثال، در شکل سمت چپ بالا اگر نواحی C و D را بخواهیم با هم ادغام کنیم، محیط مشترک بین این دو ناحیه ۳ واحد بوده و نهایتاً به شکل پایین می‌رسیم.

الف) (۱۰ نمره) روشی ارائه دهید که در آن هر یک از a_iها ۱ یا ۲ باشد.

ب) (۱۵ نمره) نشان دهید کم‌ترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ وقتی رخ می‌دهد که هر یک از a_iها ۱ یا ۲ باشد و با استفاده از این نکته جواب مسئله، یعنی کم‌ترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ را به‌دست آورید.

مسئله‌ی ۵: عمو نقاش ..... ۲۵ امتیاز

دیوار خانه‌ی عمو نقّاش به صورت یک جدول $n \times n$ می‌باشد. عمو نقّاش برای این‌که مصداق ضرب‌المثل «کوزه‌گر از کوزه شکسته آب می‌خوره» نشود، می‌خواهد دیوار خانه‌اش را رنگ‌آمیزی کند. برای این‌کار عمو هر بار قلم‌موی خودش را درون یک سطل رنگِ متفاوت با رنگ‌های قبلی که تا به حال استفاده کرده، می‌کند و قلم‌موی رنگی را روی یک سطر یا یک ستون جدول به‌طور کامل می‌کشد.

عمو نقّاش می‌خواهد هر کسی به خانه‌شان می‌آید، هنرش را بفهمد. به‌همین خاطر او می‌خواهد طوری دیوار را رنگ‌آمیزی کند که تعداد رنگ‌هائی که روی دیوار دیده می‌شود، بیش‌ترین باشد.

شما به عمو نقّاش کمک کنید؛ به این معنی که اولاً، برای هر عدد n، یک روش رنگ‌آمیزی ارائه دهید که در آن با بیش‌ترین تعداد رنگ دیوار رنگ‌آمیزی شود و ثانیاً، ثابت کنید این مقدار بیشینه است.

موفق باشید!