

مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اول)

مسئله‌ی ۱: جمع بخش پذیر ۱۵ امتیاز

$n^2 - n$ عدد طبیعی داده شده است. ثابت کنید n تا از آن‌ها هستند که جمع‌شان بر n بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۲: رنگین مسیر ۱۵ امتیاز

بازی «رنگین مسیر» یک بازی دونفره است که روی یک صفحه‌ی $n \times 4$ (۴ سطر و n ستون) که در ابتدا سفید رنگ است انجام می‌شود. بهروز و حمید مشغول انجام این بازی هستند و به نوبت طبق قوانین بازی حرکت می‌کنند. بهروز از رنگ آبی و حمید از رنگ قرمز استفاده می‌کند. بازی به این صورت انجام می‌شود که بهروز در هر مرحله دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک هستند و تشکیل یک مستطیل 1×2 (یک سطر و دو ستون) می‌دهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (آبی) در می‌آورد. حمید نیز در نوبت خود دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک باشند و تشکیل یک مستطیل 1×2 (دو سطر و یک ستون) بدهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (قرمز) در می‌آورد. اگر کسی نتواند در نوبت خود حرکت کند (یعنی نتواند دو خانه‌ی مجاور با شرایط گفته‌شده پیدا کند) نوبت بازی به نفر مقابل می‌رسد و اگر هیچ‌یک از دو نفر قادر به انجام حرکت نباشند بازی تمام می‌شود.

در پایان اگر دنباله‌ای از خانه‌های آبی وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در ستون اول جدول و آخرین خانه در ستون آخر قرار داشته باشد، در این صورت بهروز برنده‌ی بازی است.

اگر دنباله‌ای از خانه‌های قرمز وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در سطر اول جدول و آخرین خانه در سطر آخر قرار داشته باشد، در این صورت حمید برنده‌ی بازی است.

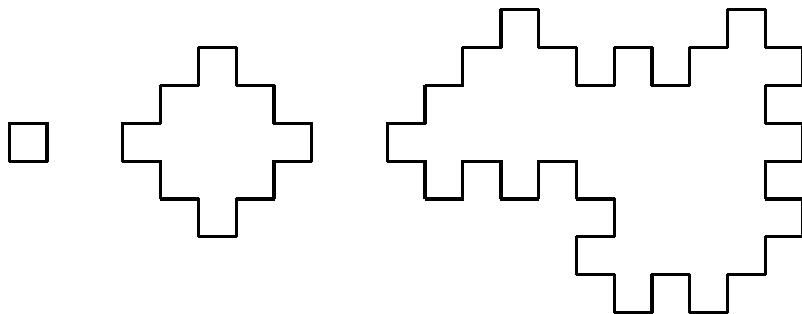
اگر هیچ‌یک از دو حالت فوق اتفاق نیفتد، بازی مساوی می‌شود. با فرض اینکه هر دو نفر به بهترین نحو ممکن بازی می‌کنند، به ازای هر $n \geq 7$:

الف) [۷ امتیاز] اگر حمید شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه کسی بازی را می‌برد؟

ب) [۸ امتیاز] اگر بهروز شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه کسی بازی را می‌برد؟

مسئله‌ی ۳: چندضلعی پلکانی ۲۰ امتیاز

یک چندضلعی را پلکانی می‌گوییم اگر (۱) هر دو ضلع متوالی آن بر هم عمود باشند، (۲) طول همه‌ی اضلاع آن یک باشد، (۳) خودش را قطع نکند. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از چندضلعی‌های پلکانی هستند:

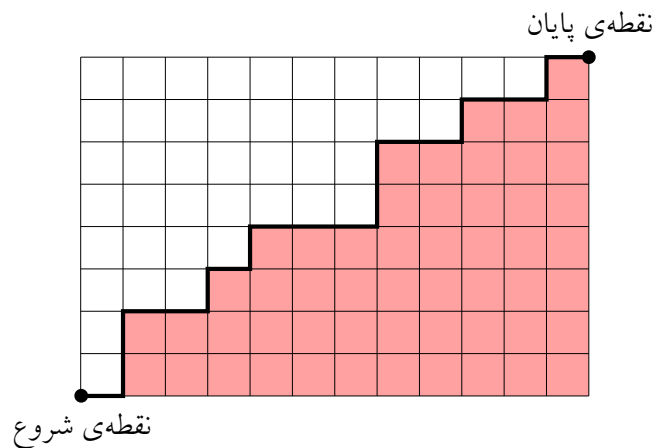


نشان دهید برای هر $n > 10$ حداقل یک چندضلعی پلکانی به مساحت n وجود دارد.

مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اول)

مسئله‌ی ۴: مساحت مسیر ۲۰ امتیاز

پریسا در نقطه‌ی پایین سمت چپ یک جدول $m \times n$ (دارای m سطر و n ستون خانه) ایستاده است و می‌خواهد با $m + n$ حرکت خود را به نقطه‌ی بالا سمت راست این جدول برساند. او در هر حرکت می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا بر روی خطوط جدول برود. به این ترتیب، پریسا در حرکت خود از نقطه‌ی پایین سمت چپ به نقطه‌ی بالا سمت راست، مسیری به طول $m + n$ را طی می‌کند. تعداد خانه‌های زیر یک مسیر را «مساحت» یک مسیر می‌نامیم. در شکل زیر نمونه‌ای از یک مسیر را در یک جدول ۱۲×۸ مشاهده می‌کنید. خانه‌های زیر مسیر در آن مشخص شده‌اند و مساحت مسیر برابر ۵۳ است.



فرض کنیم پریسا به A حالت مختلف بتواند از گوشه‌ی پایین سمت چپ جدول به بالا سمت راست آن برود. مجموع مساحت‌های این A مسیر را B می‌نامیم. $\frac{B}{A}$ چه قدر است؟ (به عبارت دیگر میانگین مساحت مسیرهایی که پریسا می‌تواند طی کند، چه قدر است؟)

مسئله‌ی ۵: جدول طلایی ۳۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ را «طلایی» می‌گوییم اگر برای هر دو سطر a و b و هر دو ستون c و d آن داشته باشیم:

$$M_{ac} + M_{bd} \neq M_{ad} + M_{bc}$$

۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱

منظور از M_{ij} ، خانه‌ی سطر i ام و ستون j ام جدول است. به عنوان مثال، جدول ۳ در ۳ روبه‌رو یک جدول طلایی است.

ثابت کنید اگر همه‌ی عناصر یک جدول طلایی از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه $n \geq 2k + 1$ است.

موفق باشید!