پنجمین المپیاد کامپیوتر

مهر ۷۴

هر جواب درست ۱ نمرهٔ مثبت و هر جواب نادرست $\frac{1}{4}$ نمرهٔ منفی دارد.

۱. ۱۰ نقطه متمایزی روی محیط یک دایره قرار دارد. تعداد ۵ ضلعی‌هایی که می‌توان با این نقاط ساخت چندتاست؟

الف) ۳۰۲۴۰ ب) ۶۰۴۸ ج) ۲۵۲ د) ۱۰۰۸ ه) ۱۲۰

۲. ۴ نفر راننده که هر کدام یک اتومبیل دارند در یک محل کار می‌کنند. این ۴ نفر به چند طریق می‌توانند اتومبیل‌های خود را با هم عوض کنند به قسمی که هیچ کدام اتومبیل خود را نرانند؟

الف) ۲۰ ب) ۹ ج) ۱۸ د) ۶ ه) ۴

۳. در مربع ۳ × ۳ مقابل، اعداد ۹ , ... , ۳ , ۲ , ۱ را طوری قرار می‌دهیم که حاصل جمع هر ستون و هر سطر و هر قطر با هم برابر باشند. مجموع اعداد واقع در چهار گوشهٔ این مربع چیست؟

۱		

الف) ۲۰ ب) ۲۴ ج) ۱۸ د) ۳۰ ه) ۲۵

۴. مبلغ ۳۶ تومان پول را بین سه برادر تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از آنها به‌اندازهٔ سن خود پول برحسب تومان رسیده است. برادر کوچکتر نصف پول خود را به تساوی بین دو برادر دیگر تقسیم می‌کند. برادر میانی و بعد برادر بزرگتر همین کار را انجام می‌دهند. در پایان پول هر سه برادر مساوی می‌شود. برادر میانی چند سال دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۱۰/۵ ج) ۱۱ د) ۱۱/۵ ه) ۱۲

۵. یک مکعب به ضلع ۳ را در نظر بگیرید که در مرکز هر یک از مکعب‌های کوچک آن یک نقطه گذاشته شده است (مجموعاً ۲۷ نقطه) چند تا مجموعهٔ سه تایی از این نقاط روی یک خط مستقیم قرار دارند؟

الف) ۴۸ ب) ۳۶ ج) ۴۹ د) ۴۳ ه) ۳۷

۶. تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از ۵۳۰ که ارقام متمایز دارند کدام است؟

الف) ۲۰۱ ب) ۲۴۰ ج) ۳۴۵ د) ۳۳۵ ه) ۳۳۶

۷. از نقشهٔ شبکهٔ راه‌های یک استان اطلاعات زیر را به‌دست آورده‌ایم: از هر شهری می‌توان به سایر شهرها مسافرت کرد. کمترین فاصلهٔ بین دو شهر ۲۸ کیلومتر است. بیشترین فاصله بین دو شهر ۱۳۷۴ کیلومتر است. تعداد شهرها ۷ تاست. شهری وجود دارد که مستقیماً به ۳ شهر دیگر جاده دارد. اگر طول کل جاده‌هایی که بین این ۷ شهر کشیده شده است n کیلومتر باشد، آنگاه:

الف) $n \geq ۱۴۳۰$ ب) $n \leq ۲۷۴۸$

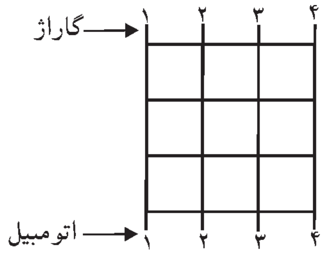
ج) $n = ۱۴۰۲$ د) $n \geq ۱۴۰۲$

ه) $۱۳۷۴ \leq n \leq ۲۷۴۸$

۸. می‌خواهیم ۸ کتاب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کنیم به قسمی که به نفر دوم حداکثر ۲ کتاب و به نفر سوم حداقل ۲ کتاب و به سایر نفرات حداقل ۱ کتاب برسد. تعداد حالات ممکن برابر است با:

الف) ۳۱ ب) ۳۵ ج) ۷۰ د) ۶۵ ه) ۵۶

۹. نقشهٔ خیابان‌های شهری به شکل مقابل است. (خیابان‌های عمودی رو به بالا یک‌طرفه‌اند) می‌خواهیم اتومبیل‌های ۱ تا ۴ را به گاراژهایی که در شکل نشان داده شده است ببریم، به‌طوری که از هر خیابان حداکثر یک اتومبیل عبور کند. کدام‌یک از دنباله‌های زیر (از چپ به راست) می‌تواند شماره‌های اتومبیل‌ها در گاراژهای ۱ تا ۴ باشد؟



الف) ۱, ۳, ۴, ۲ ب) ۳, ۱, ۴, ۲

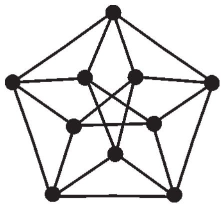
ج) ۲, ۱, ۴, ۳ د) ۲, ۳, ۱, ۴

ه) هیچ‌کدام

۱۰. یک صفحهٔ شطرنجی نامتناهی را در نظر بگیرید. مهرهٔ اسب در این صفحه به این صورت حرکت می‌کند که دو خانه در یک جهت (افقی یا عمودی) و یک خانه در جهت دیگر حرکت می‌کند. حداقل تعداد حرکت‌های لازم برای این که اسب بتواند خود را از خانهٔ (۰ , ۰) به خانهٔ (۱۳۷۴ , ۱۳۷۴) برساند، چندتاست؟

الف) ۴۵۸ ب) ۹۱۶ ج) ۱۳۷۵

د) ۶۸۷ ه) ۱۳۷۴



۱۱. در شکل مقابل دایره‌های سیاه را رأس و هر پاره‌خط بین دو دایرهٔ سیاه را یک یال می‌نامیم. کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد آن صحیح است؟

الف) می‌توان رأس‌های آن را با ۴ رنگ متفاوت چنان رنگ کرد که رنگ هر دو رأس که با یک یال به هم متصلند متفاوت باشد

ب) می‌توان اعداد ۱ تا ۱۰ را به رأس‌های آن نسبت داد به قسمی که رأس شمارهٔ i به رأس‌های $i - 1$ و $i + 1$ وصل باشد ($2 \leq i \leq 9$) و رأس ۱ نیز به ۱۰ وصل باشد

ج) می‌توان این شکل را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد (رأس‌ها را نقطه و یال‌ها را پاره‌خط در نظر بگیرید)

د) هر سه مورد فوق صحیح است

ه) هیچ کدام از موارد فوق صحیح نیست

۱۲. خروجی الگوریتم زیر چند است؟ (منظور از $A[i]$ در این الگوریتم عنصر iام یک دنباله به نام A است.)

۱ ـ به‌ازای i از ۱ تا ۵ مقدار $A[i]$ را مساوی i قرار بده.

۲ ـ به‌ازای i از ۳ تا ۹ کارهای زیر را انجام بده.

۱.۲ ـ به‌ازای j از ۱ تا ۵ کارهای زیر را انجام بده.

۱.۱.۲ ـ در صورتی که $1 \leq i - j \leq 5$، جای $A[j]$ و $A[i - j]$ را با هم عوض کن.

۳ ـ مقدار $A[5]$ را چاپ کن.

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) ۴ ه) ۵

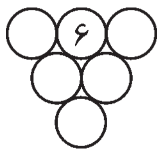
۱۳. تعدادی از دانش‌آموزان یک مدرسه در یک اردوی یک هفته‌ای شرکت کردند. در هر روز ۳ نفر از دانش‌آموزان مسؤولیت تهیهٔ غذا را برعهده داشتند. پس از پایان اردو معلوم شد که هیچ دو نفر از دانش‌آموزان بیش از یک بار با هم مسؤول تهیهٔ غذا نبوده‌اند. اگر n تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در اردو باشد، آنگاه:

الف) $n = ۲۱$ ب) $n = ۷$

ج) $n \geq ۷$ د) $n < ۹$

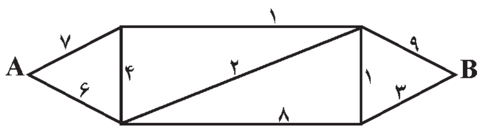
ه) $n \geq ۹$

۱۴. ۶ دایرهٔ مقابل داده شده است: می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۵ را در دایره‌های خالی بنویسیم به‌طوری که عدد نوشته شده در هر دایره تفاضل اعداد نوشته شده در دو دایرهٔ بالایی آن باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد.



الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۵. بین منبع آب A و مصرف‌کنندهٔ B به‌صورت زیر لوله‌کشی شده است: عددی که بر روی هر لوله نوشته شده است، نشان‌دهنده حداکثر ظرفیت انتقال آن لوله (لیتر بر ثانیه) است. مصرف‌کننده حداکثر چند لیتر بر ثانیه آب دریافت خواهد کرد؟



الف) ۱۳ ب) ۷

ج) ۱۲ د) ۴۱

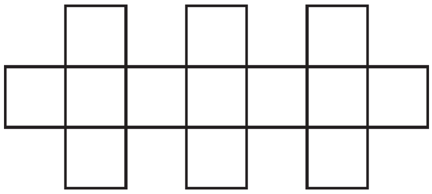
ه) ۱۱

مسأله‌های بله ـ خیر

پاسخ هر یک از مسائل زیر «بله» یا «خیر» است که هر جواب درست یک نمرهٔ مثبت و هر جواب نادرست یک نمرهٔ منفی دارد.

۱۶. در یک صفحهٔ شطرنجی مربع به ضلع ۱۳۷۴ متر آیا می‌توان یک چندضلعی با اضلاع افقی و عمودی که طول هر ضلع آن برحسب متر عدد صحیح باشد رسم کرد که محیط آن ۱۹۹۵ متر شود؟

۱۷. در شکل زیر که از ۴۰ عدد چوب کبریت ساخته شده ۱۳ مربع ۱×۱ دیده مـی‌شود: آیـا مـی‌توان بـا برداشتن ۹ چوب کبریت، شکلی ایجاد کرد که در آن هیچ مربعی دیده نشود ؟



۱۸. ۱۱ سنگریزه در اختیار داریم. دو بازیکن با این سنگریزه‌ها این بازی را انجام می‌دهند:

هر بازیکن در نوبت خودش ۱، ۲، ۳ یا ۴ سنگریزه بر مـی‌دارد. وقـتی کـه سـنگریزه‌ها تـمام شـد، تـعداد سنگریزه‌هایی که هر یک از بازیکنان برداشته‌اند را می‌شماریم. هر بازیکن که به تعداد زوجی سنگریزه برداشته بود، برنده است. آیا بازیکن اول می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

۱۹. یک دنبالهٔ $a_۰ , a_۱ , a_۲ , \ldots , a_n$ متنوع نامیده می‌شود، اگر این شرایط برقرار باشند:

● برای هر i $(۰ \leq i \leq n)$، a_i و $a_{i+۱}$ متفاوت باشند.

● اگر $n > ۱$، دنباله $a_۰ , a_۲ , \ldots , a_{۲[\frac{n}{۲}]}$ نیز یک دنبالهٔ متنوع باشد. ($[x]$ یعنی بزرگترین عدد صـحیح کوچکتر یا مساوی با x)

برای مثال A , B , C , A , D , C یک دنبالهٔ متنوع است.

اگــر $a_i \in \{A , B , C\}$ ، آیــا دنــبالهٔ مـتنوع $a_۰ , a_۱ , \ldots , a_{۱۳۷۴}$ وجـود دارد بـه‌طوری کـه دنـبالهٔ $a_۰ , a_۳ , a_۶ , \ldots , a_{۱۳۷۴}$ نیز متنوع باشد؟

۲۰. در یک نقشه شبکهٔ راه‌های منطقه، هر شهر دقیقاً به سه شهر دیگر به‌طور مستقیم جاده دارد. آیا امکان دارد که با بستن یکی از این جاده‌ها ارتباط بعضی از شهرها را با بعضی از شهرهای دیگر قطع کرد؟

۲۱. برای هر عدد صحیح غیرمنفی n ، عدد $a_{n+۱}$ از a_n براساس قانون زیر به‌دست می‌آید:

اگر آخرین رقم سمت راست عدد a_n از ۵ بیشتر باشد، $a_{n+۱} = ۹a_n$. در غیر این صورت، رقم سمت راست a_n را کنار می‌گذاریم و ارقام باقیمانده نمایشگر $a_{n+۱}$ است. اگر $a_{n+۱}$ شامل هیچ رقمی نباشد، کار پایان می‌یابد. آیا به‌ازای هر $a_۰$ دلخواه این فرایند پایان‌پذیر است؟

۲۲. یک نوار داریم که به n خانه تقسیم شده است. خانه‌ها را به‌ترتیب از ۱ تا n شماره‌گذاری کرده‌ایم. دو عدد مهره در خانه‌های n و $n-1$ قرار گرفته‌اند. دو بازیکن بازی زیر را انجام می‌دهند:

هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند یکی از مهره‌ها (هر کدام) را برداشته و در یک خانهٔ خالی با شمارهٔ کمتر قرار دهد. بازیکنی که آخرین حرکت را انجام دهد برنده است. در صورتی که $n = 9$ باشد آیا نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده باشد؟

۲۳. یک ماتریس $M_{3\times3}$ در نظر بگیرید که درایه‌هایش از علایم $\{<$ و $>$ و $=\}$ باشد. ساختن توابع f و g با خواص زیر مورد نظر است.

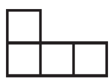
- اگر مقدار M_{ij} مساوی $<$ باشد، آنگاه $f(i) < g(j)$.
- اگر مقدار M_{ij} مساوی $>$ باشد، آنگاه $f(i) > g(j)$.
- اگر مقدار M_{ij} مساوی $=$ باشد، آنگاه $f(i) = g(j)$.

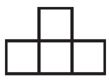
ماتریس ۳ × ۳ زیر که مؤلفه‌هایش مشخص شده‌اند تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} < & < & = \\ = & < & > \\ < & < & > \end{bmatrix}$$

آیا برای ماتریس فوق توابع f و g با خواص مورد نظر را می‌توان یافت؟

□ موزاییک‌هایی از انواع زیر وجود دارند:


نوع ۱


نوع ۲

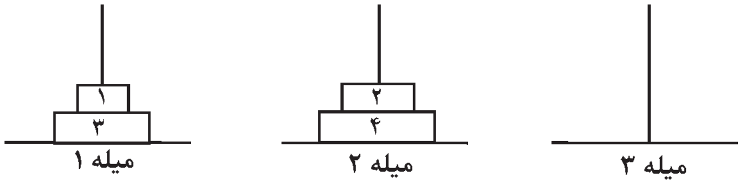
منظور از فرش کردن یک صفحه با موزاییک‌ها پوشاندن تمام خانه‌های صفحه با موزاییک‌هاست، به‌طوری که موزاییک‌ها روی هم قرار نگیرند.

۲۴. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۱ می‌توان یک صفحه شطرنجی ۶ × ۶ را فرش کرد؟

۲۵. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی ۶ × ۶ را فرش کرد؟

۲۶. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ را فرش کرد؟

□ سه میله با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و چهار مهرهٔ سوراخدار با شماره‌های ۱ تا ۴ مطابق شکل زیر داده شده است:



می‌خواهیم با حرکت دادن این مهره‌ها و رعایت قواعد زیر کلیهٔ مهره‌ها را به‌صورت زیر بر میلهٔ سوم ببریم:

● در هر حرکت تنها یک مهره حرکت داده شود.

● هیچ‌گاه مهرهٔ با شمارهٔ بزرگتر بر روی مهره با شمارهٔ کوچکتر قرار نگیرد.

۲۷. آیا می‌توان با کمتر از ۱۱ حرکت این کار را انجام داد؟

۲۸. در صورتی که ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داشته باشیم به‌طوری که مهره‌های ۱، ۳ و ۵ در میلهٔ اول و مهره‌های ۲ و ۴ در میلهٔ دوم باشند، آیا می‌توان با کمتر از ۲۲ حرکت این مسأله را حل کرد؟

۲۹. آرایهٔ a با n عنصر به‌صورت صعودی مرتب شده است. می‌خواهیم ببینیم که آیا عنصر x در آرایهٔ a وجود دارد یا خیر. برای این کار الگوریتم زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

۱ ـ i را مساوی با ۱ و j را مساوی با n قرار بده.

۲ ـ k را مساوی با $[\frac{i+j}{2}]$ قرار بده.

۳ ـ اگر $a_k < x$ ، در این صورت i را مساوی با $k+1$ قرار بده، در غیر این صورت j را مساوی با $k-1$ قرار بده.

۴ ـ اگر $a_k = x$ ، در این صورت x در آرایهٔ a وجود دارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۵ ـ اگر $i \geq j$ ، در این صورت x در آرایهٔ a وجود ندارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۶ ـ برو به مرحلهٔ «۲».

۷ ـ پایان.

آیا این الگوریتم برای تمام مقادیر x درست کار می‌کند؟

۳۰. اگر الگوریتم فوق را به‌صورت زیر تغییر دهیم، پاسخ چیست؟

۱ـ i را مساوی با ۱ و j را مساوی با n قرار بده.

۲ـ k را مساوی با $[\frac{i+j}{۲}]$ قرار بده.

۳ـ اگر $a_k > x$، در این صورت j را مساوی با k قرار بده، در غیر این صورت i را مساوی با $k + ۱$ قرار بده.

۴ـ اگر $i \neq j$، در این صورت به مرحلهٔ «۲» برو.

۵ـ اگر $a_{[\frac{i+j}{۲}]} = x$، در این صورت x در آرایهٔ a وجود دارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۶ـ در غیر این صورت x در آرایهٔ a وجود ندارد.

۷ - پایان.