باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ اوّل سال ۱۴۰۴

سی و ششمین دورهٔ المپیاد کامپیوتر

به همراه پاسخ‌نامهٔ تشریحی

تعداد سؤالات	مدّت آزمون
۲۰ سؤال	۱۵۰ دقیقه

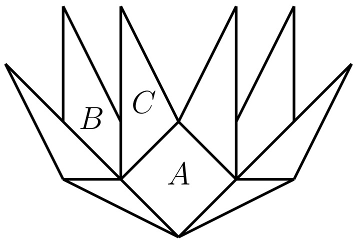
توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین حساب ممنوع است.

۱. بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید. در صورت هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۲. یک عدد پاسخبرگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته‌شده در پایین پاسخ‌برگ را با مداد مشکی تکمیل کنید.
۳. پاسخبرگ توسط دستگاه تصحیح می‌شود، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید. همچنین، پاسخ هر سوال را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۴. دفترچهٔ سؤالات باید همراه پاسخبرگ تحویل داده شود.
۵. پاسخ درست به هر سوال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.
۶. نشانی تارنمای المپیاد کامپیوتر ایران inoi.ir است.

- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به صورت تصادفی است.
- سؤال‌های ۱۹ و ۲۰ در یک دسته‌ی دوسؤالی آمده است و قبل از آن دسته، توضیح مربوطه ارائه شده است.

۱ پیکاسو می‌خواهد گلی را که در شکل مقابل رسم شده است رنگ‌آمیزی کند. این شکل از ۹ ناحیه‌ی بسته تشکیل شده است. به دو ناحیه‌ی متفاوت که در حداقل دو نقطه مشترک باشند، **مجاور** می‌گوییم. برای مثال، ناحیه‌های B و C مجاورند، اما A و B مجاور نیستند. پیکاسو به یک رنگ‌آمیزی **منسجم** می‌گوید اگر برای هر ناحیه، در میان ناحیه‌های مجاور آن، حداکثر دو رنگ متفاوت وجود داشته باشد. حداکثر چند رنگ متفاوت می‌توان برای رنگ‌آمیزی منسجمِ شکل مقابل به کار برد؟



۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

ناحیه‌ی A چهار همسایه دارد که در یک رنگ‌آمیزی منسجم، حداکثر دو رنگ متفاوت میان آن‌ها وجود دارد. این چهار ناحیه با حداکثر ۲ رنگ متفاوت و پنج ناحیه‌ی دیگر با حداکثر ۵ رنگ متفاوت رنگ‌آمیزی شده‌اند. لذا در مجموع حداکثر از ۷ رنگ برای رنگ‌آمیزی منسجم شکل می‌توان استفاده کرد. می‌توان به سادگی دید که چنین رنگ‌آمیزی‌ای وجود دارد. □

۲ در یک جدول ۳×۳ تمام اعداد ۱ تا ۹ را نوشته‌ایم. به دو خانه از جدول **مجاور** می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. می‌دانیم که جمع اعداد نوشته شده در هر دو خانه‌ی مجاور از این جدول، حداکثر ۱۱ است. مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ممکنی که می‌توانند در خانه‌ی وسط جدول نوشته شوند، کدام است؟

۱) $\{۳, ۵, ۷\}$ ۲) $\{۵, ۷\}$ ۳) $\{۵\}$ ۴) $\{۵, ۶, ۷\}$ ۵) $\{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

می‌توان جدول‌هایی با خانه‌ی وسط ۵ و ۶ و ۷ ارائه داد.
نشان می‌دهیم این مقادیر، تنها مقادیر ممکن برای خانه‌ی وسط هستند. می‌دانیم جمع هر دو عدد مجاور حداکثر برابر ۱۱ است. پس عدد ۹ تنها با اعداد ۱ و ۲ مجاور است. یعنی در یکی از ۴ خانه‌ی گوشه‌ی جدول است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنیم جدول مانند شکل زیر باشد.

		۲
	۱	۹

همچنین عدد ۸ تنها می‌تواند با اعداد ۱، ۲ و ۳ مجاور باشد، که بر اساس آنچه تا به این‌جا به دست آورده‌ایم، تنها حالت ممکن این است که با عدد ۳ و یکی از دو عدد ۱ یا ۲ مجاور باشد و در نتیجه در یکی از ۴ گوشه‌ی دیگر جدول است. بدون از دست دادن کلیت می‌توان شرایط شکل زیر را در نظر گرفت.

۸	۳	
۲		
۹	۱	

حال فرض کنیم عدد ۴ در خانه‌ی وسط جدول باشد. در این صورت عدد ۷ با حداقل یکی از اعداد ۵ یا ۶ مجاور خواهد بود و این جدول معتبر نیست. پس ثابت کردیم که هیچ‌کدام از اعداد مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۸, ۹\}$ در خانه‌ی وسط جدول نیستند. □

۳ چند ۵تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵)$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق کند؟

- $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۳۰$
- دقیقاً ۳ عدد از میان $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵)$ مضرب ۵ باشند.

برای مثال دو ۵تایی مرتب $(۵, ۵, ۵, ۸, ۷)$ و $(۷, ۸, ۵, ۵, ۵)$ در شرایطِ خواسته شده صدق می‌کنند.

۱) ۴۰۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۵۶۰ ۴) ۲۰۰ ۵) ۶۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

می‌دانیم دقیقاً دو عدد از میان $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$ مضرب ۵ نیستند. ابتدا به $\binom{۵}{۲}$ حالت این دو عدد را انتخاب می‌کنیم. باقی‌مانده‌ی این دو عدد بر ۵ باید یکی از ۴ حالت $\{(۴, ۱), (۱, ۴), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$ باشد. همچنین می‌دانیم همه اعداد طبیعی هستند. به این منظور به هر کدام از ۳ عدد دیگر، هر کدام ۵ واحد اختصاص می‌دهیم. حال ۱۰ واحد داریم که باید بین ۵ عدد تقسیم شود، به طوری که اعداد به پیمانه ۵ ثابت بمانند. اگر فرض کنیم به هر x_i، $5a_i$ واحد اضافه کرده‌ایم، می‌دانیم: $a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ = \frac{۱۰}{۵} = ۲$ تعداد ۵تایی‌های مرتب از اعداد حسابی که در این شرط صدق کنند برابر است با $\binom{۶}{۴}$. لذا تعداد کل ۵تایی‌های مرتب $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵)$ برابر است با: $\binom{۵}{۲} \times ۴ \times \binom{۶}{۴} = ۶۰۰$ □

۴ دور یک دایره ۷ صندلی چیده شده است و ۷ نفر با شماره‌های ۱ تا ۷ روی این صندلی‌ها نشسته‌اند. علی قصد دارد تعدادی از این افراد را از جای خود بلند کند تا بتوان افراد نشسته را به دو گروه **قرمز** و **آبی** تقسیم کرد، به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- در گروه قرمز، هیچ دو نفری روی صندلی‌های مجاور نباشند.
- در گروه آبی، هر دو نفری روی صندلی‌های مجاور باشند.

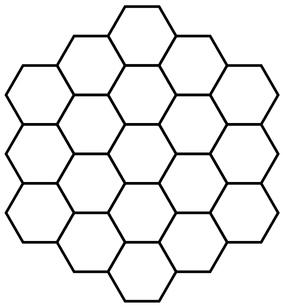
او می‌خواهد این کار را به‌گونه‌ای انجام دهد که کمترین تعداد ممکن افراد از صندلی‌های خود بلند شوند. این مقدار کمینه چقدر است و به چند روش می‌توان افراد ایستاده را انتخاب کرد؟

۱) ۳ و ۷ ۲) ۱ و ۷ ۳) ۲ و ۱۴ ۴) ۳ و ۱۴ ۵) ۲ و ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

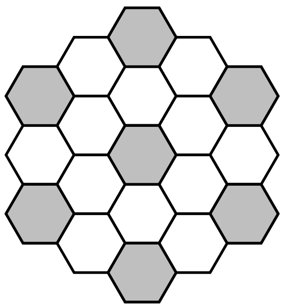
مطابق اصل لانه‌کبوتری، گروه آبی حداکثر دو نفر و گروه قرمز حداکثر ۳ نفر دارد؛ لذا علی حداقل باید دو نفر را از صندلی‌های خود بلند کند. به سادگی می‌توان دید، علی باید دو نفر را که بین آن‌ها دقیقاً یک صندلی فاصله است را از جای خود بلند کند. او این کار را به ۷ طریق می‌تواند انجام دهد. □

۵ زنبورک می‌خواهد کندوی خود را که به شکل روبرو است تزیین کند و علی که از خوشحالی او بیزار است، می‌خواهد مانع انجام این کار شود. در هر مرحله، زنبورک یکی از خانه‌های کندو را تزیین می‌کند، سپس علی تعدادی از خانه‌هایی که با آن خانه ضلع مشترک دارند و تزیین نشده‌اند را انتخاب می‌کند و در آن‌ها حشره‌کش می‌زند. با این کار زنبورک دیگر نمی‌تواند آن خانه‌ها را تزیین کند. این روند تا زمانی که زنبورک نتواند خانه‌ی جدیدی را تزیین کند ادامه می‌یابد. حداکثر تعداد خانه‌هایی که او می‌تواند مطمئن باشد در هر صورت تزیین می‌کند، چقدر است؟



۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.



خانه‌های رنگی شکل مقابل را در نظر بگیرید. هیچ دوتایی از این خانه‌ها ضلع مشترک ندارند، پس زنبورک می‌تواند در هر صورت این ۷ خانه را تزیین کند. از طرفی، اگر علی در هر مرحله پس از زنبورک همه‌ی خانه‌های مجاور ضلعی خانه‌ای که زنبورک تزیین کرده است را حشره‌کش بزند، زنبورک نمی‌تواند بیشتر از ۷ خانه را تزیین کند. □

۶ به دنباله‌ای از اعداد «تصاعد حسابی» می‌گوییم اگر اختلاف هر دو عضو متوالیِ آن، مقدار ثابتی باشد. عدد طبیعیِ x را **خوب** می‌نامیم، اگر یک تصاعد حسابی از اعداد حقیقی به طول ۱۲ وجود داشته باشد که دقیقاً x عضو آن عدد طبیعی باشند. برای مثال، دنباله‌ی زیر یک تصاعد حسابی از اعداد حقیقی به طول ۱۲ است که دقیقاً ۶ عضو آن عدد طبیعی هستند:

$$\langle ۱,\ ۲٫۵,\ ۴,\ ۵٫۵,\ ۷,\ ۸٫۵,\ ۱۰,\ ۱۱٫۵,\ ۱۳,\ ۱۴٫۵,\ ۱۶,\ ۱۷٫۵\rangle$$

پس ۶ عددی خوب است. کوچک‌ترین عدد طبیعیِ k را بیابید که k خوب نباشد.

۱) ۵ ۲) ۱۳ ۳) ۷ ۴) ۱۱ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

به ازای هر عدد طبیعی $۱ \leqslant x \leqslant ۱۲$، دنباله‌ی $\langle x-۱۱, x-۱۰, \ldots, x-۱, x\rangle$ یک تصاعد حسابی با دقیقاً x عدد طبیعی است. □

۷ مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را در نظر بگیرید. برای هر زیرمجموعه‌ی دلخواه $S \subseteq A$، $f(S)$ را برابر با تعداد اعداد طبیعیِ $i \in A$ تعریف می‌کنیم که حداقل یکی از اعداد i یا $i+۱$ در S باشد. برای مثال، اگر $S = \{۱, ۲, ۷, ۱۰\}$ باشد، آنگاه $f(S) = ۶$ است. مجموع $f(S)$ برای تمام زیرمجموعه‌های S از A چقدر است؟

۱) ۷۴۲۴ ۲) ۱۰۲۴۰ ۳) ۸۱۹۶ ۴) ۲۰۴۸ ۵) ۵۱۲۰

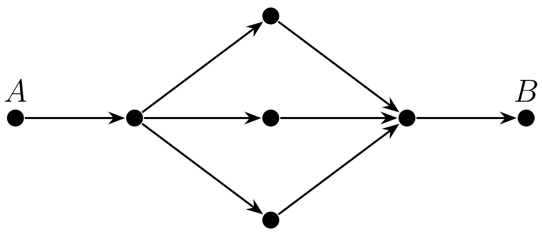
پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به ازای هر عدد $1 \leqslant i \leqslant 10$، $g(i)$ را برابر با تعداد زیرمجموعه‌هایی از A مانند S تعریف می‌کنیم که حداقل یکی از اعداد i یا $i-1$ در S باشد (به عبارت دیگر، مجموعه‌هایی مانند S که عدد i در $f(S)$ اثرگذار باشد). مقدار مورد نظر سوال با مجموع $g(i)$ها برابر است.

- برای $2 \leqslant i \leqslant 10$، $g(i)$ برابر 3×2^8 است.
- برای $i = 1$، $g(i)$ برابر 2^9 است.

جمع این مقادیر برابر ۷۴۲۴ است. □

۸ در شکل زیر ۳ مسیر جهت‌دار از A به B وجود دارد. می‌خواهیم نقاط شکل را با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری کنیم، به نحوی که از هر عدد دقیقاً یک بار استفاده شود. به ازای هر کدام از !۷ روش شماره‌گذاری، تعداد مسیرهایی از A به B که در دنباله‌ی اعداد آن‌ها عدد ۲ بلافاصله پس از عدد ۳ ظاهر شده است را یادداشت می‌کنیم. جمع اعداد یادداشت‌شده چند است؟



۱) ۹۶۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۸۰ ۵) ۱۴۴۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به ازای هر حالت شماره‌گذاری اگر تعداد مسیرهای مطلوب صفر نباشد، باید نقطه‌ی شماره‌ی ۲ با یک پیکان به نقطه‌ی شماره‌ی ۳ مستقیماً وصل شده باشد (به طوری که جهت پیکان از ۲ به ۳ باشد). در این صورت، اگر نقطه A شماره ۲ یا نقطه B شماره ۳ داشته باشد، مستقل از شماره‌گذاری نقاط دیگر، سه مسیر مطلوب داریم. در ۶ حالت دیگر (نه A شماره‌ی ۲ باشد، نه B شماره‌ی ۳) دقیقاً یک مسیر مطلوب وجود دارد. پس مجموع تعداد مسیرهای مطلوب به ازای تمام حالت‌های شماره‌گذاری برابر است با: $3 \times 2 \times 5! + 1 \times 6 \times 5! = 1440$
□

۹ دو عدد دودویی ۹ رقمی $x = (x_8 \dots x_1 x_0)_2$ و $y = (y_8 \dots y_1 y_0)_2$ را در نظر بگیرید. هر رقم از این اعداد می‌تواند مقدار ۰ یا ۱ داشته باشد. هربار می‌توانیم عملیات **چرخونک** را روی این دو عدد انجام دهیم. در این عملیات، ابتدا یک عدد دلخواه مانند $0 \leqslant i \leqslant 7$ انتخاب می‌کنیم و سپس ترتیب ارقام دو عدد x و y را در جایگاه‌های i و $i+1$ ام به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

x_8	$\cdots$	x_{i+1}	x_i	$\cdots$	x_1	x_0
y_8	$\cdots$	y_{i+1}	y_i	$\cdots$	y_1	y_0

$\Downarrow$

x_8	$\cdots$	y_{i+1}	x_{i+1}	$\cdots$	x_1	x_0
y_8	$\cdots$	y_i	x_i	$\cdots$	y_1	y_0

می‌خواهیم با انجام تعداد دلخواهی عملیات چرخونک روی دو عدد x و y کاری کنیم که حاصل جمع آن‌ها بیشترین مقدار ممکن شود. اگر در ابتدا $x = (۱۰۱۱۰۱۰۱۰)_۲$ و $y = (۱۰۰۱۱۰۱۱۰)_۲$ باشد، این مقدار بیشینه چقدر است؟

۱) ۹۱۴ ۲) ۸۱۶ ۳) ۹۹۲ ۴) ۶۷۲ ۵) ۷۳۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

هر دو عدد را می‌توان به $(۱۱۱۱۱۰۰۰۰)_۲$ تبدیل کرد. به وضوح این مقدار بیشترین جواب ممکن است. □

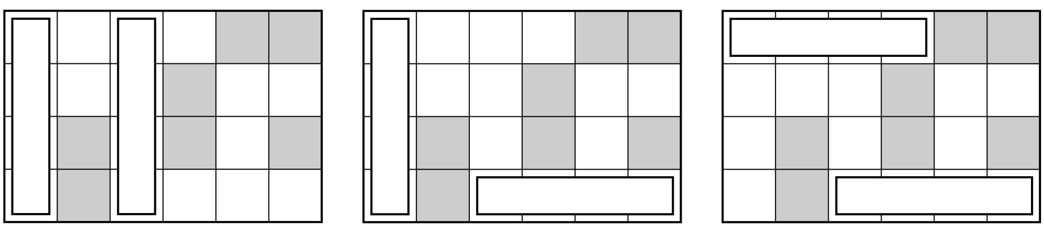
۱۰ سارا تابلوی زیر را به مناسبت برگزاری آزمون‌های المپیاد امسال آماده کرده است. او دو کاشی ۴×۱، یک کاشی ۳×۱، دو کاشی ۲×۱ و دو کاشی ۱×۱ دارد. هدف سارا این است که کاشی‌ها را به‌گونه‌ای روی شکل بچیند تا در نهایت فقط کلمات جمله‌ی «به مرحله‌ی اول سی و ششمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر خوش آمدید» روی تابلو نمایش داده شود. او به چند روش متفاوت می‌تواند این کار را انجام دهد؟ کاشی‌های هم‌اندازه یکسان در نظر گرفته می‌شوند و هر کاشی را می‌توان در صورت نیاز دوران داد.

به	مرحله‌ی اول	دومین	چهل و چهارمین	هفتمین	یازدهمین
سی و نهمین	دهمین	سی و ششمین	هشتمین	بیست و دومین	هفدهمین
دوره‌ی	فیزیک	المپیاد	نجوم و اخترفیزیک	کامپیوتر	سواد رسانه‌ای
هوش مصنوعی	جغرافیا	علوم و فناوری نانو	علوم زمین	خوش آمدید	شیمی

۱) ۶ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲ ۵) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

با حالت‌بندی روی محل قرارگیری کاشی‌های ۴×۱، تعداد حالت‌های مطلوب را می‌شماریم.

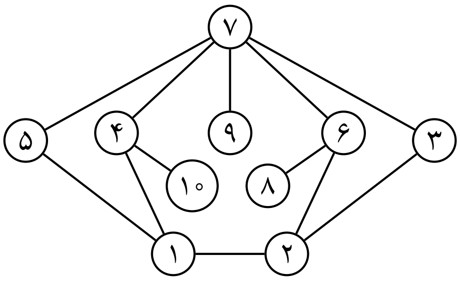


۱ ۲ ۳

- اگر مطابق حالت ۱ چیده شوند، به ۶ طریق سایر کاشی‌ها را می‌توان چید.
- اگر مطابق حالت ۲ چیده شوند، به ۶ طریق سایر کاشی‌ها را می‌توان چید.
- اگر مطابق حالت ۳ چیده شوند، به ۲ طریق سایر کاشی‌ها را می‌توان چید.

جمع مقادیر فوق، ۱۴ است. □

۱۱ در مدرسه‌ای ۱۰ دانش‌آموز با شماره‌های ۱ تا ۱۰ داریم که روابط دوستی میان آن‌ها به شکل روبرو است. دو نفر با یکدیگر دوست‌اند اگر و تنها اگر شماره‌های متناظر آن‌ها، در شکل به یکدیگر متصل باشند (واضح است که دوستی یک رابطه‌ی دوطرفه است).



قرار است این دانش‌آموزان به صورت تک به تک به دفتر مدیر مدرسه بروند. می‌دانیم هر دانش‌آموزی که به دفتر مدیر می‌رود، به اندازه‌ی مجموع شماره‌ی تمام دوستانش که هنوز به دفتر نرفته‌اند دلگرم می‌شود. برای مثال، اگر ابتدا دانش‌آموز شماره‌ی ۱۰ به دفتر مدیر برود، چون تنها دوست او دانش‌آموز شماره‌ی ۴ است، به اندازه‌ی ۴ واحد دلگرم خواهد شد. سپس اگر نفر بعدی دانش‌آموز شماره‌ی ۴ باشد، از آن‌جا که دو دوست دیگرِ او یعنی ۱ و ۷ هنوز به دفتر نرفته‌اند، ۸ = ۷ + ۱ واحد دلگرم خواهد شد. دانش‌آموزان می‌خواهند به ترتیبی به دفتر مدیر بروند که در پایان، مجموع دلگرمی آن‌ها بیشترین مقدار ممکن باشد. این مقدار بیشینه چقدر است؟

۱) ۶۰   ۲) ۷۵   ۳) ۱۲۶   ۴) ۵۵   ۵) ۴۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر دو دانش‌آموز با هم دوست باشند، این دوستی دقیقاً یکی از آن‌ها را دلگرم خواهد کرد. به عبارت دیگر به ازای هر رابطه‌ی دوستی، شماره‌ی دقیقاً یکی از آن دو دوست به مجموع دلگرمی‌ها اضافه خواهد شد، چون یکی از آن‌ها زودتر به دفتر مدیر می‌رود و دیگر در دلگرمی دوستش تاثیری نخواهد داشت. پس بیشترین مجموع دلگرمی در صورتی رخ می دهد که به ازای هر دو نفر که با هم دوست هستند، کسی که شماره‌اش کمتر است زودتر به دفتر مدیر برود. اگر دانش‌آموزان با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۱۰ به همین ترتیب به دفتر مدیر بروند، این شرط برآورده می‌شود. در این حالت مجموع دلگرمی آن‌ها برابر است با: ۱۱ + ۹ + ۷ + ۱۷ + ۷ + ۱۵ + ۹ + ۰ + ۰ + ۰ = ۷۵
□

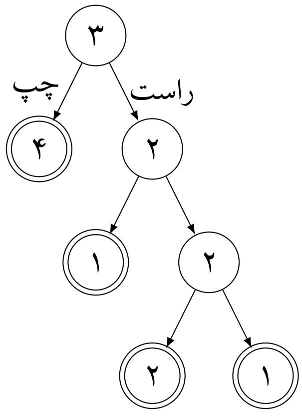
۱۲ ۱۰ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ روی یک دایره به ترتیب ساعتگرد قرار دارند و یک توپ در دست فرد شماره ۱ است. در هر مرحله، فرد دارنده‌ی توپ می‌تواند توپ را به یکی از دو فرد مجاور خود بدهد. توپ به گونه‌ای مبادله می‌شود که بین هر دو نفر، توپ در مجموع حداکثر ۲ بار رد و بدل شده باشد. چند روش متفاوت برای رساندن توپ به فرد شماره ۶ وجود دارد؟ دو روش باهم متفاوت هستند، اگر دنباله‌ی شماره‌های افرادی که به ترتیب توپ را دریافت می‌کنند، در آن دو روش متفاوت باشد. برای مثال، دنباله‌ی $\langle ۱, ۲, ۳, ۲, ۱, ۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶, ۵, ۶ \rangle$ یک روش مجاز برای رساندن توپ به فرد شماره ۶ است.

۱) ۴۲   ۲) ۳۶   ۳) ۱۲   ۴) ۷۲   ۵) ۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

می‌توان دید که یا میان افراد مجاور ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ و یا افراد مجاور ۱, ۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶ دقیقاً ۱ بار توپ رد و بدل شده است. بدون تغییر در کلیت سوال، فرض کنید حالت دوم رخ دهد. در این صورت مقادیر x و y چنان وجود دارند که $۱ \leqslant x \leqslant y \leqslant ۶$ و توپ ابتدا از فرد یک به فرد ۲ فرد ۳ و به همین ترتیب تا فرد شماره‌ی x رسیده است و پس از آن این مسیر برگشته تا توپ به دست فرد شماره‌ی ۱ برسد؛ سپس مسیر ۱, ۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶ طی شده و نهایتاً توپ از فرد شماره‌ی ۶، به فرد شماره‌ی ۵، شماره‌ی ۴ و به همین ترتیب تا فرد شماره‌ی y رد و بدل شده است؛ سپس با برگشت این مسیر و رسیدن توپ به فرد شماره‌ی ۶ روند پایان می‌یابد. برای انتخاب x و y، $\binom{۷}{۲}$ حالت وجود داد. لذا جواب مسئله، $\binom{۷}{۲} \times ۲$ خواهد بود.
□

۱۳ یک لانه‌ی مورچه، مطابق شکل روبرو، شامل ۷ بخش اصلی است. در هر بخش عددی صحیح نوشته شده است که **گردونه‌ی** آن بخش نامیده می‌شود. ۴ بخش لانه که با دو دایره‌ی تو در تو مشخص شده‌اند را **پایانه** می‌نامیم. در ابتدا، مورچه در بخش بالایی لانه، با گردونه‌ی ۳، قرار دارد و جهت او به سمت راست است.



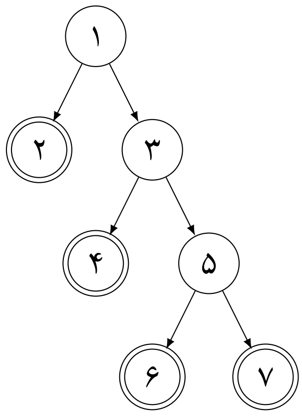
در هر مرحله، مورچه مطابق زیر حرکت می‌کند:

- ابتدا گردونه‌ی بخشی که در آن قرار دارد را می‌خواند و به آن مقدار، جهت خود را تغییر می‌دهد (از راست به چپ و از چپ به راست).
- سپس در همان جهت به بخش پایینی مربوطه حرکت می‌کند.

این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که مورچه به یک پایانه برسد. برای مثال، اگر گردونه‌ها تغییری نکنند، مورچه در نهایت در پایانه‌ی سمت چپِ بخش اولیه، با گردونه‌ی ۴، متوقف می‌شود.
می‌خواهیم دقیقاً دو واحد به گردونه‌ها اضافه کنیم. در چند حالت مختلفِ انجام این تغییر، مورچه در نهایت روی پایانه‌ای با گردونه‌ی فرد متوقف می‌شود؟ دو حالت متفاوت محسوب می‌شوند اگر گردونه‌ی حداقل یکی از بخش‌ها در این دو حالت متفاوت باشد.

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۹ ۵) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.



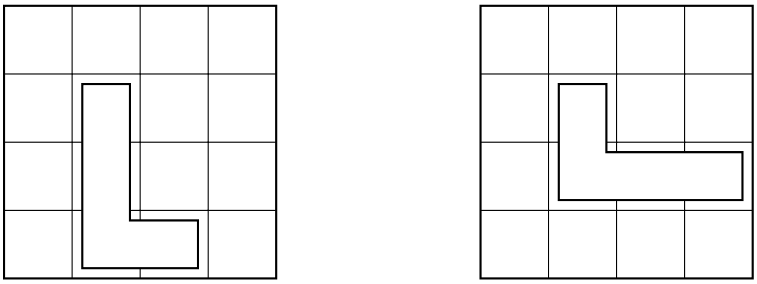
مطابق شکل روبرو بخش‌های لانه را شماره‌گذاری می‌کنیم. برای حل سوال، روی پایانه‌ای که مورچه متوقف خواهد شد حالت‌بندی می‌کنیم.

- اگر مورچه روی پایانه‌ی شماره‌ی ۲ متوقف شده باشد، لازم است که گردونه‌ی آن فرد باشد. لذا حتماً یک واحد به گردونه‌ی آن اضافه کرده‌ایم. همچنین نباید به بخش شماره ۱ چیزی اضافه شده باشد. پس به ۵ حالت می‌توان یک واحد دیگر به یک گردونه‌ی دیگر اضافه کرد.
- اگر مورچه روی پایانه‌ی شماره‌ی ۴ متوقف شده باشد، حتماً یک واحد به گردونه‌ی بخش ۱ و یک واحد به گردونه‌ی بخش ۳ اضافه شده است. پس به یک روش می‌توان به این پایانه رسید.
- می‌توان دید که ممکن نیست مورچه روی پایانه‌ی شماره‌ی ۶ متوقف شود، زیرا در این صورت لازم است به گردونه‌ی هر دو بخش ۱ و ۵ و خود پایانه ۶ یک واحد اضافه شود که ممکن نیست.
- اگر هم روی پایانه‌ی شماره‌ی ۷ متوقف شده باشد، قطعا یک واحد به گردونه‌ی شماره ۱ اضافه شده و ۳ حالت داریم که واحد دیگر را به کدام یک از بخش‌های ۲، ۴ یا ۶ اضافه کنیم.

پس در مجموع تعداد حالت‌های معتبر برابر ۹ = ۳ + ۱ + ۵ خواهد بود. □

۱۴ پیمان یک سکه را در یکی از خانه‌های یک جدول ۴ × ۴ پنهان کرده است. جبار از محل سکه بی‌اطلاع است، اما دستگاه فلزیابی دارد که می‌تواند به کمک آن محل سکه را پیدا کند. در هر مرحله، جبار می‌تواند دستگاه را روی ۴ خانه‌ی جدول که به صورت یک L قرار گرفته‌اند بگذارد. او می‌تواند دستگاه را بچرخاند یا وارونه کند (برای مثال دو تا از حالت‌های قرارگیری دستگاه در شکل نشان داده شده است). اگر سکه در یکی از این ۴ خانه

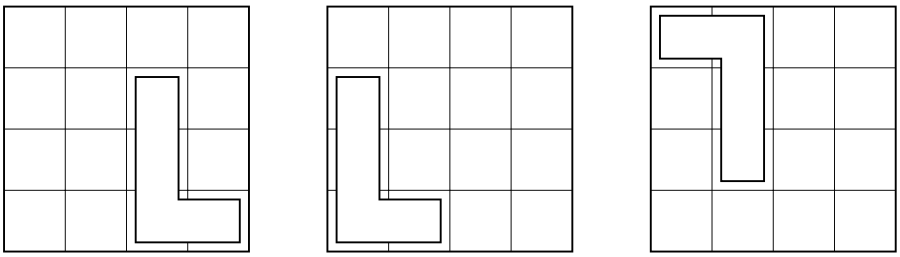
باشد، دستگاه بوق می‌زند و اگر نباشد، دستگاه هیچ واکنشی نشان نمی‌دهد. جبار حداقل چند بار باید از دستگاه استفاده کند تا به طور تضمینی بتواند محل سکه را مشخص کند؟



۱) ۴   ۲) ۸   ۳) ۵   ۴) ۷   ۵) ۶

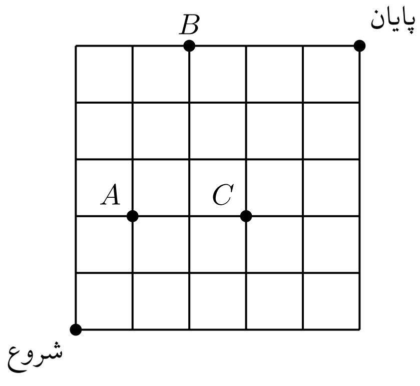
پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

می‌توان نشان داد این تعداد لازم است. اگر در اولین مرحله دستگاه بوق نزند، ۴ خانه را می‌توان به طور تضمینی حذف کرد. در هر یک از مراحل بعدی، می‌توان از حذف حداکثر نصف خانه‌ها اطمینان داشت. پس به حداقل ۴ مرحله‌ی دیگر نیاز داریم. لذا در مجموع ۵ مرحله لازم است.
برای پیدا کردن سکه با ۵ مرحله، ابتدا جبار ۳ بار دستگاه را به اشکال زیر روی جدول قرار می‌دهد.



در صورتی که دستگاه در یکی از مراحل بوق بزند، مکان سکه به آن ۴ خانه محدود می‌شود و اگر در هیچ مرحله‌ای بوق نزند، سکه در یکی از ۴ خانه‌ی باقی‌مانده است. کافی است او در مرحله‌ی بعد دستگاه را به نحوی قرار دهد که با ۲ خانه از خانه‌های ممکن برای وجود سکه اشتراک داشته باشد. با استدلالی مشابه، محل احتمالی سکه به ۲ خانه از جدول کاهش می‌یابد. در نهایت، با قرار دادن دستگاه به نحوی که با خانه‌های احتمالی وجود سکه تنها یک اشتراک داشته باشد، مکان سکه مشخص می‌شود. □

۱۵ در سیاره‌ی جهش‌کنندگان، تعدادی پورتال وجود دارد که امکان جابه‌جایی آنی بین نقاط مشخصی از این سیاره را فراهم می‌کنند. شکل زیر، بخشی از این سیاره را نشان می‌دهد:



طبق شکل، سه پورتال در نقاط A، B و C قرار دارند. پارسا که در این سیاره زندگی می‌کند، می‌خواهد از نقطه‌ی شروع (نقطه‌ی پایین چپ) به نقطه‌ی پایان (نقطه‌ی بالا راست) برسد. او در مسیر خود، در هر مرحله می‌تواند یکی از سه حرکت زیر را انجام دهد:

- یک واحد به سمت بالا حرکت کند.
- یک واحد به سمت راست حرکت کند.
- اگر روی یک پورتال قرار داشت، می‌تواند از آن استفاده کند و به یکی از دو پورتال دیگر منتقل شود.

اگر پارسا حداکثر یک بار بتواند از پورتال‌ها استفاده کند، تعداد مسیرهای متفاوتی که می‌تواند با پیمایش آن‌ها از نقطه‌ی شروع به نقطه‌ی پایان برسد چقدر است؟

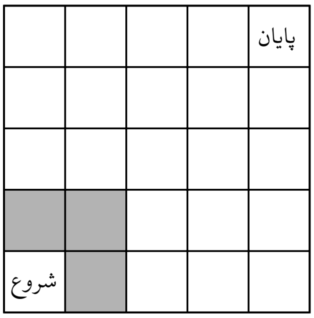
۱) ۱۵۹۰ ۲) ۱۵۶۴ ۳) ۱۸۴۲ ۴) ۲۵۲ ۵) ۱۳۳۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

- اگر از پورتال A استفاده کنیم: $\binom{3}{1} \times \left(\binom{3}{0} + \binom{5}{2}\right) = 33$ مسیر داریم.
- اگر از پورتال B استفاده کنیم: $\binom{7}{2} \times \left(\binom{7}{3} + \binom{5}{2}\right) = 945$ مسیر داریم.
- اگر از پورتال C استفاده کنیم: $\binom{5}{2} \times \left(\binom{3}{0} + \binom{7}{3}\right) = 360$ مسیر داریم.
- اگر از پورتالی استفاده نکنیم: $\binom{10}{5} = 252$ مسیر داریم.

مجموع این مقادیر، ۱۵۹۰ خواهد بود. □

۱۶ در شکل روبرو، جدولی ۵ × ۵ داریم که هر خانه‌ی آن با یکی از دو رنگ سیاه یا سفید رنگ‌آمیزی شده است. به تعدادی خانه از این جدول یک **گروه** می‌گوییم، اگر بتوان از هر کدام با پیمایش تعدادی خانه‌ی هم‌رنگ و مجاور ضلعی به دیگری رسید. همچنین، یک **خانواده** از جدول، گروهی از خانه‌هاست که نتوان خانه‌ی جدیدی به آن افزود به‌گونه‌ای که همچنان یک گروه باقی بماند. برای مثال، جدول روبرو از ۳ خانواده تشکیل شده است.



پوپک در ابتدا در خانه‌ی شروع قرار دارد. او در هر مرحله رنگ خانه‌ای که روی آن قرار دارد را از سفید به سیاه یا بالعکس تغییر می‌دهد و سپس یک واحد به سمت راست یا بالا حرکت می‌کند. این کار را تا زمانی که به خانه‌ی پایان برسد، ادامه می‌دهد. در نهایت رنگ خانه‌ی پایان را تغییر داده و از جدول خارج می‌شود. پس از اتمام این روند، جدول از حداکثر چند خانواده تشکیل شده است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با طی کردن مسیر راست، راست، راست، بالا، بالا، بالا، بالا، راست به این جواب می‌رسیم. می‌توان دید که بیشتر از این مقدار ممکن نیست. می‌دانیم رنگ خانه‌ی شروع در انتها سیاه است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید در مرحله‌ی اول به خانه‌ی راست حرکت کرده‌ایم، اگر در مرحله‌ی بعد نیز به راست حرکت کرده باشیم، در بهترین حالت به جواب ۵ می‌رسیم. اگر هم به بالا حرکت کرده باشیم، در انتها حداکثر ۴ خانواده خواهیم داشت. □

۱۷ می‌خواهیم در هر خانه‌ی خالی از جدول مقابل یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را بنویسیم، به طوری که:

۲			
			۲

- مجموع اعداد هر دو سطر با هم برابر باشد و
- مجموع اعداد هر دو ستون با هم برابر باشد.

این کار به چند صورت ممکن است؟

۱) ۳۶   ۲) ۱۴۴   ۳) ۲۱۶   ۴) ۱۸   ۵) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

اگر فرض کنیم مجموع اعداد هر سطر برابر x و مجموع اعداد هر ستون برابر y باشد، خواهیم داشت:

$$\text{مجموع اعداد جدول} = ۴y = ۳x$$

تنها حالات ممکن برای x و y طبق شروط مسئله $(x = ۸, y = ۶)$ و $(x = ۴, y = ۳)$ خواهد بود.
به ازای $(x = ۸, y = ۶)$، تنها جدول معتبر حالتی است که در همه‌ی خانه‌ها عدد ۲ نوشته شده باشد.
حال روش‌های پر کردن جدول به ازای $(x = ۴, y = ۳)$ را بررسی می‌کنیم. به این منظور، کافی است روی تعداد ستون های تمام ۱ جدول حالت‌بندی کنیم:

- در ۱ حالت چینش دو ستون جدول تمام ۱ اند.
- در ۴ حالت چینش دقیقاً یک ستون جدول تمام ۱ است.
- در ۱۳ حالت چینش هیچ ستونی از جدول تمام ۱ نیست.

□

۱۸ عملگر $\&$ دو عدد در مبنای دو را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و یک عدد به عنوان خروجی تولید می‌کند. هر رقمِ خروجی، فقط زمانی برابر با ۱ می‌شود که آن رقم در هر دو عدد ورودی برابر ۱ باشد. برای مثال:

$$۶ = (۱۱۰)_۲,\ ۳ = (۰۱۱)_۲ \implies ۶ \,\&\, ۳ = (۰۱۰)_۲ = ۲$$

دستگاهی داریم که برای هر عدد طبیعی ورودی i، الگوریتم زیر را اجرا می‌کند:

۱. متغیر j برابر ۰ قرار داده می‌شود.
۲. متغیر ans برابر ۰ قرار داده می‌شود.
۳. اگر مقدار $i \,\&\, j$ برابر j باشد، مقدار ans یک واحد افزایش می‌یابد.
۴. اگر مقدار i و j برابر باشد، مقدار ans یادداشت می‌شود و الگوریتم خاتمه می‌یابد.
۵. مقدار j یک واحد افزایش می‌یابد و الگوریتم به مرحله‌ی ۳ بازمی‌گردد.

برای مثال، اگر عدد ۲ را به دستگاه ورودی بدهیم، الگوریتم با یادداشت عدد ۲ خاتمه می‌یابد. اگر اعداد $۱, ۲, \ldots, ۶۳$ را به ترتیب به دستگاه ورودی بدهیم، مجموع اعداد یادداشت شده چقدر خواهد بود؟

۱) ۱۵۳۸   ۲) ۵۵۲   ۳) ۱۰۲۴   ۴) ۷۲۸   ۵) ۶۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

پاسخ مسئله برابر است با تعداد زوج مرتب‌های i و j به طوری که مجموعه‌ی رقم‌های ۱ j زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی رقم‌های ۱ i باشد. فرض کنید می‌خواهیم i و j را مشخص کنیم. به ازای هر k، سه حالت مجاز برای رقم kام اعداد i و j وجود دارد:

- هر دو ۱ باشند.
- هر دو ۰ باشند.
- رقم kام i برابر ۱ و رقم kام j برابر ۰ باشد.

همچنین هر کدام از i و j در مبنای ۲ حداکثر ۶ رقم دارند (اعداد کوچکتر از $۶۴ = ۲^۶$ حداکثر ۶ رقمی‌اند.) اما می‌دانیم i عددی طبیعی است و لذا زوج مرتب ($i = ۰$، $j = ۰$) معتبر نیست. در نتیجه، در مجموع تعداد زوج مرتب‌های معتبر برای i و j برابر است با: $۳^۶ - ۱ = ۷۲۸$ □

ملک‌شاه به تازگی شایعه‌ای درباره‌ی وجود گنجی در یزد شنیده است. گفته می‌شود این گنج در زمینی مستطیلی به ابعاد ۳×۲ پنهان شده است، به طوری که در یکی از خانه‌ها ۱ شمش، در خانه‌ای دیگر ۲ شمش، و به همین ترتیب تا ۶ شمش طلا قرار دارد. با این حال، ملک‌شاه نمی‌داند هر تعداد شمش در کدام خانه جای گرفته است. ملک‌شاه برای به دست آوردن شمش‌های هر خانه باید آن خانه را حفاری کند، اما اگر دو خانه‌ی مجاورِ ضلعیِ این زمین حفاری شوند، زمین دچار نشست شده و کل گنج از بین خواهد رفت.
نورا جادوگر اعظم، از تعداد دقیق شمش‌های هر خانه آگاه است و تصمیم دارد به ملک‌شاه در این حفاری کمک کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ اگر نورا تعداد شمش‌های همه‌ی خانه‌ها را پیش از شروع حفاری به ملک‌شاه نشان دهد، ملک‌شاه حداکثر چند شمش را می‌تواند به طور تضمینی به دست آورد؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۲ ۵) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

خانه‌های این زمین مستطیلی را به صورت شطرنجی با رنگ های سفید و سیاه رنگ آمیزی می‌کنیم. ملک‌شاه می‌تواند همه‌ی خانه‌های هم‌رنگ را حفاری کند، بدون آن که زمین دچار نشست شود. مجموع تعداد شمش‌های مخفی‌شده در این زمین ۲۱ است. بنا بر اصل لانه‌کبوتری، در یکی از مجموعه‌ی خانه‌های هم‌رنگ حداقل $\lceil \frac{۲۱}{۲} \rceil = ۱۱$ تا شمش مخفی شده است. پس ملک‌شاه در هر شرایطی می‌تواند حداقل ۱۱ شمش طلا به دست بیاورد. اگر شمش‌ها به شکل زیر مخفی شده باشند، ملک‌شاه نمی‌تواند بیشتر از ۱۱ شمش به دست بیاورد.

۱	۳	۵
۲	۴	۶

پس حداکثر تعداد شمش‌هایی که ملک‌شاه می‌تواند به طور تضمینی به دست بیاورد برابر ۱۱ است. □

۲۰ فرض کنید به ازای هر i از ۱ تا ۶، به ترتیب روند زیر انجام می‌شود:

- نورا محل خانه‌ی دارای i شمش را به ملک‌شاه نشان می‌دهد.

- ملک‌شاه تصمیم می‌گیرد که آن خانه را حفاری کند یا از آن بگذرد.

در این صورت ملک‌شاه حداکثر چند شمش را می‌تواند به طور تضمینی به دست آورد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۸ ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با رنگ‌آمیزی شطرنجی جدول، کافی است ملک‌شاه رنگ دارای خانه‌ی ۱ شمش را حفاری نکند. به این ترتیب می‌تواند رنگ دیگر را حفاری کند که مجموع شمش‌های آن حداقل ۹ = ۴ + ۳ + ۲ است.
حال، بررسی می‌کنیم چرا بیشتر از این مقدار امکان‌پذیر نیست. سه حالت چینش زیر را در نظر بگیرید که در مکان خانه‌های دارای ۱ و ۲ شمش مشترک هستند.

۱	۶	۳
۲	۵	۴

۱

۱	۶	۴
۲	۵	۳

۲

۱	۳	۵
۲	۶	۴

۳

- اگر ملک‌شاه تصمیم بگیرد خانه‌ی دارای ۱ شمش را حفاری کند: اگر در ادامه حالت ۱ رخ دهد، ملک‌شاه حداکثر ۹ شمش به دست می‌آورد.
- اگر ملک‌شاه تصمیم بگیرد خانه‌ی دارای ۱ شمش را حفاری نکند اما خانه‌ی دارای ۲ شمش را حفاری کند: اگر در ادامه حالت ۳ رخ دهد، ملک‌شاه حداکثر ۹ شمش به دست می‌آورد.
- اگر ملک‌شاه تصمیم بگیرد خانه‌ی دارای ۱ و ۲ شمش را حفاری نکند: اگر در ادامه حالت ۲ رخ دهد، ملک‌شاه حداکثر ۹ شمش به دست می‌آورد.

پس حداکثر تعداد شمش‌هایی که ملک‌شاه می‌تواند به طور تضمینی به دست بیاورد برابر ۹ است. □