- سؤال‌های **۲۹ تا ۳۰** در دسته‌ی چندسؤالی آمده‌اند و توضیح دسته پیش از آن آمده است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ رقم i ام (از سمت راست) عدد X را با $f(X,i)$ نشان می‌دهیم. تمام اعداد ۷ رقمی با ارقام ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. به ازای هر عدد، مقدار $\sum_{i=1}^{7} i \times f(X,i)$ را حساب کرده و این مقادیر را جمع می‌زنیم. حاصل چیست؟

۱) ۱۹۲ ۲) ۵۳۷۶ ۳) ۱۰۷۵۲ ۴) ۴۰۳۲ ۵) ۳۸۴

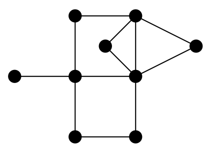
پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

تعداد کل اعداد برابر 2^7 و به ازای هر i، رقم i ام در 2^6 عدد برابر ۱ است. پس با در نظر گرفتن ارقام به طور جداگانه، مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{7}(i \times 1 \times 2^6 + i \times 2 \times 2^6) = 3 \times 2^6 \times \sum_{i=1}^{7} i = 3 \times 2^6 \times 28 = 5376$$

□

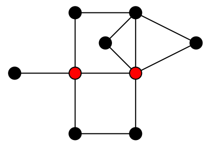
۲ می‌خواهیم رئوس گراف زیر را با قرمز و آبی رنگ کنیم. باید طوری این کار انجام شود که هر رأس (چه قرمز و چه آبی) دست‌کم یک رأس قرمز مجاور داشته باشد. توجه کنید در یک گراف دو رأس را **مجاور** گوییم، اگر با یک یال به هم وصل باشند. کمینه‌ی تعداد رأس‌های قرمز چیست؟



۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با قرمز کردن تنها یک رأس نمی‌توان به هدف رسید، زیرا خود آن رأس، مجاور قرمز نخواهد داشت.
با قرمز کردن دو رأس به شکل زیر نیز کار انجام می‌شود.



پس پاسخ برابر ۲ است. □

۳ دو عدد را **هفتول** گوییم، اگر مجموع‌شان ۷ باشد. چند تاس با وجوه ۱, ۲, . . . , ۶ داریم، طوری که وجه‌های هر دو عدد هفتول، مجاور باشند؟ توجه کنید دو تاس را که با چرخش و دوران در فضا به هم تبدیل می‌شوند، یک‌سان در نظر می‌گیریم.

۱) ۳۰ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴ ۵) ۳۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

عدد ۱ را به یک حالت روی یکی از وجه‌ها نوشته و تاس را روی زمین می‌گذاریم، طوری که وجه ۱ چسبیده به زمین باشد. حال عدد ۶ را به یک حالت روی یکی از وجه‌های مجاور عدد ۱ نوشته و تاس را طوری می‌چرخانیم که عدد ۶ روبه‌روی ما قرار گیرد. عدد روبه‌روی ۱ به چهار حالت انتخاب می‌شود. انتخاب وجه برای هفتول متناظر آن نیز دو حالت دارد. دو عدد باقی‌مانده نیز به دو حالت در دو وجه باقی‌مانده قرار می‌گیرند. پس پاسخ برابر $۱۶ = ۲ \times ۲ \times ۴$ است. □

۴ جدول زیر را در نظر بگیرید.

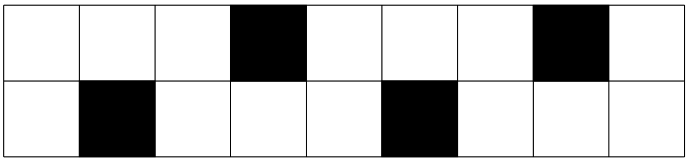
								B
A								

دو خانه را **مجاور** گوییم، اگر دارای یک ضلع مشترک باشند. *ایلیچ* در خانه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی B برود. او در هر مرحله می‌تواند به یک خانه‌ی مجاور برود. *حمید* می‌خواهد تعدادی از خانه‌های جدول را با خاشاک پر کند تا ایلیچ نتواند از آن خانه‌ها برای عبور استفاده کند. حمید باید طوری این کار را انجام دهد که دست کم یک مسیر از A به B برای ایلیچ وجود داشته باشد. حمید دوست دارد تعداد خانه‌های کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای ایلیچ، بیشینه شود. این مقدار بیشینه چیست؟ توجه کنید خود A و B هم جزء مسیر حساب می‌شوند.

۱) ۱۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۴ ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

ابتدا روشی ارائه می‌دهیم که حمید بتواند طول کوتاه‌ترین مسیر را به ۱۴ برساند. اگر حمید به شکل زیر خانه‌ها را پر کند، مسیر ایلیچ یکتا و طول آن ۱۴ است:



حال ثابت می‌کنیم هر گونه که حمید خانه‌ها را پر کند، مسیری به طول حداکثر ۱۴ برای ایلیچ وجود دارد. اگر طول کوتاه‌ترین مسیر از ۱۴ بیش‌تر شود، در زیرمستطیل ۸×۲ سمت چپ، تعداد خانه‌های درون مسیر از ۱۲ بیش‌تر است. پس با افراز این زیرمستطیل به چهار مستطیل ۲×۲ طبق اصل لانه‌ی کبوتری، زیرمستطیلی ۲×۲ وجود دارد که تمام خانه‌های آن در مسیر هستند. به وضوح می‌توان طول این قسمت از مسیر را دو واحد کاهش داد که با فرض کوتاه‌ترین بودن تناقض دارد. □

۵ دور یک دایره، ۳۴ توپ چیده شده است که برخی از آن‌ها قرمز و بقیه آبی هستند. از هر پنج توپ متوالی، دست کم سه توپ رنگ قرمز دارند. بیشینه‌ی ممکن تعداد توپ‌های آبی چیست؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳ ۵) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم پاسخ از ۱۳ بیش‌تر نیست. اگر توپ آبی نداشته باشیم که حکم برقرار است. پس یک توپ آبی در نظر بگیرید و با شروع از آن، توپ‌ها را به دسته‌های پنج‌تایی متوالی تقسیم کنید. چهار توپ نیز در انتها باقی می‌ماند که در دسته‌ای قرار نمی‌گیرند. در هر کدام از دسته‌ها حداکثر دو توپ آبی وجود دارد. حال چهار توپ باقی‌مانده را به همراه توپ آبی آغازین در یک دسته‌ی پنج‌تایی بگذارید. نتیجه می‌شود که چهار توپ گفته شده حداکثر یک توپ آبی دارند. پس در کل حداکثر $6 \times 2 + 1$ توپ آبی داریم.
حال روشی برای ۱۳ توپ ارائه می‌دهیم. توپ‌ها را به شکل زیر به ترتیب دور دایره بگذارید (b نماد آبی و r نماد قرمز است):

$$bbrrrbbrrrbbrrrbbrrrbbrrrbbrrrbrrr$$

□

۶ ۳۴ توپ متفاوت با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۳۴ دور یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان ۱۷ تا از آن‌ها را قرمز و بقیه را آبی کرد، طوری که از هر ۱۲ توپ متوالی، دقیقن ۶ توپ رنگ قرمز داشته باشند؟

۱) ۱۶   ۲) ۶۴   ۳) ۲   ۴) ۴۰۹۶   ۵) ۱۰۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم در میان هر ۱۰ توپ متوالی دقیقن پنج توپ قرمز داریم. ۱۰ توپ متوالی در نظر گرفته و بقیه‌ی توپ‌ها را به دو دسته‌ی ۱۲ تایی متوالی تقسیم کنید. پس در میان ۲۴ توپ باقی‌مانده دقیقن ۱۲ توپ قرمز داریم و در نتیجه در میان ده توپ در نظر گرفته شده $17 - 12 = 5$ توپ قرمز داریم. به استدلال مشابه ثابت می‌کنیم در هر چهار توپ متوالی دقیقن دو توپ قرمز داریم (با در نظر گرفتن چهار توپ متوالی و تقسیم بقیه‌ی توپ‌ها به سه دسته‌ی ۱۰ تایی). در انتها به استدلال مشابه ثابت می‌کنیم در هر دو توپ متوالی دقیقن یک توپ قرمز داریم. پس توپ‌ها باید به صورت یک در میان، قرمز و آبی باشند که تنها دو حالت دارد. □

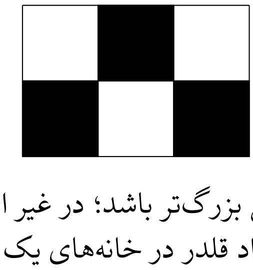
۷ یک جدول 2×3 داریم. دو خانه را **مجاور** گوییم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را در خانه‌های این جدول نوشت، طوری که به ازای هر خانه یکی از دو حالت زیر رخ بدهد؟

- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه‌های مجاورش کوچک‌تر باشد.
- عدد آن خانه از اعداد تمام خانه‌های مجاورش بزرگ‌تر باشد.

۱) ۴۰   ۲) ۸۸   ۳) ۸۰   ۴) ۲۴   ۵) ۹۶

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

خانه‌ها را به شکل زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم:



یک عدد را **قلدر** گوییم، اگر از مجاورهای‌ش بزرگ‌تر باشد؛ در غیر این صورت آن را **نوچه** گوییم. اعداد مجاور یک عدد قلدر، نوچه‌اند و بالعکس. پس اعداد قلدر در خانه‌های یک رنگ و اعداد نوچه در خانه‌های رنگ دیگر قرار می‌گیرند. انتخاب رنگ قلدرها دو حالت دارد. بدون از دست دادن کلّیت مسئله فرض کنید قلدرها در خانه‌های سیاه باشند.
از آن‌جایی که هر خانه، حداقل دو مجاور دارد، اعداد ۱ و ۲ نمی‌توانند قلدر باشند. حال دو حالت داریم:

- عدد ۳ قلدر نباشد. در این صورت اعداد ۴، ۵ و ۶ قلدر هستند. این اعداد به !۳ حالت در خانه‌های سیاه قرار گرفته و اعداد دیگر نیز به !۳ حالت در خانه‌های سفید قرار می‌گیرند.
- عدد ۳ قلدر باشد. در این صورت عدد ۳ نمی‌تواند در ستون وسط باشد، زیرا باید از سه عدد بزرگ‌تر باشد که امکان ندارد. پس جای عدد ۳ دو حالت دارد. اعداد ۱ و ۲ باید مجاور عدد ۳ باشند که به دو حالت، در دو خانه‌ی مجاور ۳ قرار می‌گیرند. حال عدد ۴ به طور یک‌تا در تنها خانه‌ی سفید باقی‌مانده قرار می‌گیرد (زیرا باید دست کم با یکی از اعداد ۵ و ۶ مجاور باشد و قلدر نیست). اعداد ۵ و ۶ به دو حالت در دو خانه‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند.

پس در کل $۸۸ = (۲ \times ۲ \times ۲ + ۶ \times ۶) \times ۲$ حالت داریم. □

۸ خط یک مترو اصفهان دارای ۱۱ ایستگاه با شماره‌های ۰، ۱، ... و ۱۰ است. مترو از ایستگاه ۰ شروع کرده و در ایستگاه ۱۰ کار خود را تمام می‌کند. در یک روز خلوت زمستانی، مترو بدون مسافر شروع به حرکت کرده است. در هر یک از ایستگاه‌های ۰، ۱، ... و ۹ دقیقن یک مسافر جدید وارد مترو می‌شود. پس از رسیدن به هر ایستگاه (به جز ایستگاه پایانی)، هر نفر مستقل از بقیه به احتمال $\frac{۱}{۲}$ پیاده می‌شود. توجه کنید هیچ کس در همان ایستگاهی که سوار شده، پیاده نمی‌شود! امید ریاضی تعداد کسانی که به ایستگاه پایانی (۱۰) می‌رسند، چیست؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵۱۱}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۱۰۲۳}{۵۱۲}$ ۵) $\frac{۹}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

این مسئله نیاز به اطّلاعاتی در مورد متغیرهای تصادفی و امید ریاضی دارد. در صورتی که با این مفاهیم آشنا نیستید، قبل از خواندن راه حل، آن‌ها را مطالعه کنید (البته مسئله راه حل بدون استفده از اطّلاعات خاص هم دارد، امّا طولانی‌تر است).
به ازای هر فرد i (فردی که از ایستگاه i ام وارد می‌شود)، متغیّر تصادفی I_i را تعریف می‌کنیم که برابر ۱ است، اگر فرد i به ایستگاه پایانی برسد و در غیر این صورت برابر ۰ است. امید ریاضی I_i برابر احتمال رسیدن فرد i به ایستگاه پایانی یا همان $\frac{۱}{۲^{۹-i}}$ می‌باشد. امید ریاضی جمع چند متغیر تصادفی برابر با جمع امید ریاضی تک تک آن‌هاست؛ پس امید ریاضی خواسته شده برابر است با:

$$E(X) = E(\sum I_i) = \sum E(I_i) = \sum_{i=۰}^{۹} \frac{۱}{۲^{۹-i}} = ۲ - \frac{۱}{۲^۹} = \frac{۱۰۲۳}{۵۱۲}$$

□

۹ در دنیای *سلطان* افراد به سه دسته‌ی نوع ۰، نوع ۱ و نوع ۲ تقسیم می‌شوند! در این دنیا هر گاه فردی از دسته‌ی X بخواهد در جملات‌ش عددی مانند Y را بگوید، باقی‌مانده‌ی $X + Y$ را در تقسیم بر ۳ بیان می‌کند. برای مثال یک فرد از دسته‌ی ۱، جمله‌ی «۱۳۹۵ به علاوه‌ی ۵ می‌شود ۱۴۰۰» را به صورت «۱ به علاوه‌ی ۰ می‌شود ۰» بیان می‌کند! چهار نفر از این دنیا با نام‌های A، B، C، D جملات زیر را گفته‌اند:

- A: C از دسته‌ی ۲ است.
- B: جمع شماره‌ی دسته‌ی C با شماره‌ی دسته‌ی من برابر ۲ است.
- C: جمع شماره‌ی دسته‌ی B با شماره‌ی دسته‌ی من برابر ۱ است.
- D: ضرب شماره‌ی دسته‌ی A با شماره‌ی دسته‌ی من برابر ۱ است.

دسته‌ی A چه چیزهایی می‌تواند باشد؟

۱) ۰ ۲) ۰ و ۱ و ۲ ۳) در هیچ دسته‌ای نمی‌تواند باشد ۴) ۰ و ۱ ۵) ۰ و ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای ۰ و ۱ مثال‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = ۰ \qquad B = ۰ \qquad C = ۲ \qquad D = ۱$$

$$A = ۱ \qquad B = ۲ \qquad C = ۱ \qquad D = ۲$$

حال ثابت می‌کنیم نوع A نمی‌تواند برابر ۲ باشد. فرض کنید نوع A برابر ۲ است. اگر نوع D برابر k باشد، طبق گفته‌ی D باید $x + ۲x$ طدر پیمانه‌ی ۳ برابر ۱ باشد که امکان ندارد. □

۱۰ یک جایگشت از اعداد ۱ ،۲ ، ... و ۹ داریم. در هر مرحله می‌توان جایگشت را به دو تکه از عناصر متوالی تقسیم کرد و ترتیب عناصر هر تکه را وارون کرد. برای مثال، جایگشت ⟨۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹⟩ می‌تواند به جایگشت ⟨۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱, ۲⟩ تبدیل شود. توجه کنید تکه‌ها می‌توانند تهی باشند. یک جایگشت را **مطلوب** گوییم، اگر بتوان با شروع از آن و انجام چند مرحله، به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) رسید. چند جایگشت مطلوب داریم؟

۱) ۷۲ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸ ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

اگر اعداد را دور دایره ببینیم، ترتیب‌شان تنها وارون می‌شود. پس ترتیب دوری عناصر باید مرتّب شده از کوچک به بزرگ یا بزرگ به کوچک باشد. انتخاب نقطه‌ی شروع جایگشت از روی دایره نیز ۹ حالت دارد. پس $۲ \times ۹ = ۱۸$ حالت داریم. دقّت کنید تمام این جایگشت‌های ذکر شده قابل ساختن نیز هستند. □

۱۱ در سوال قبل به ازای هر جایگشت مطلوب، کمینه‌ی تعداد مراحل لازم برای رسیدن به جایگشت مرتب شده (از کوچک به بزرگ) را در نظر بگیرید. در میان این مقادیر، بیشینه چیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۱ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

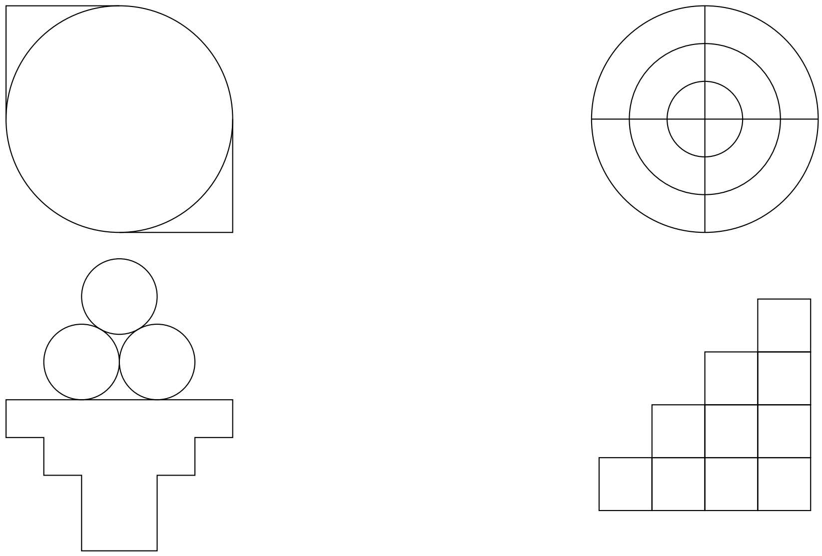
ترتیب دوری هر جایگشت مطلوب، مرتّب شده یا وارون آن است (طبق سوال قبل). اگر جایگشت مرتّب شده بود، ابتدا با یک حرکت ترتیب آن را وارون می‌کنیم. حال با یک حرکت می‌توانیم نقطه‌ی شروع جایگشت را برابر ۱ کنیم و جایگشت مرتّب می‌شود. □

۱۲ یک مربّع با اضلاع موازی محورهای مختصات را **تفرقک** می‌نامیم. *سلطان* یک تفرقک در صفحه کشیده است. او در هر مرحله می‌تواند یکی از کارهای زیر را انجام دهد:

- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و دایره‌ای درون آن، مماس بر اضلاع تفرقک بکشد.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفرقکی درون آن بکشد، طوری که هر چهار رأس‌ش روی محیط دایره باشند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و تفرقکی دور آن بکشد، طوری که اضلاع‌ش مماس بر دایره باشند.
- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.
- یک دایره با خطوط کشیده شده انتخاب کند و آن را پاک کند.

- یک تفرقک با خطوط کشیده شده انتخاب کند و با کشیدن دو پاره‌خط عمودی و افقی، آن را به چهار تفرقک برابر تقسیم کند.

توجه کنید ممکن است با پاک کردن یک تفرقک، قسمتی از یک یا چند تفرقک دیگر نیز از بین برود. سلطان یک شکل را **ریسمانی** می‌گوید، هر گاه قابل ساختن از شکل اولیه (یک تفرقک) با تعدادی مرحله باشد. چند تا از چهار شکل زیر، ریسمانی هستند؟



۱) ۳　　۲) ۰　　۳) ۱　　۴) ۴　　۵) ۲

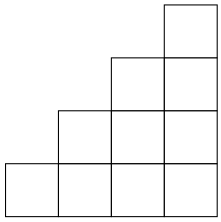
پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

- روش ساختن شکل بالا_چپ: ابتدا یک دایره درون تفرقک آغازین می‌کشیم. سپس تفرقک آغازین را به چهار تفرقک برابر تقسیم می‌کنیم. در انتها دو تفرقک بالا_راست و پایین_چپ را پاک می‌کنیم.
- روش ساختن شکل بالا_راست: ابتدا تفرقک آغازین را به چهار تفرقک برابر تقسیم می‌کنیم. سپس دایره‌ای درون آن کشیده و درون دایره‌ی کشیده شده یک تفرقک می‌کشیم. دوباره درون تفرقک کشیده شده یک دایره کشیده و درون آن یک تفرقک می‌کشیم. باز هم درون تفرقک کشیده شده یک دایره می‌کشیم. حال با پاک کردن سه تفرقک تودرتو، شکل به وجود می‌آید.
- روش ساختن شکل پایین_راست: ابتدا تفرقک آغازین را به چهار تفرقک برابر تقسیم می‌کنیم. سپس هر کدام از چهار تفرقک ساخته شده را به چهار تفرقک کوچک‌تر تبدیل می‌کنیم. حال درون هر یک از ۱۶ تفرقک کوچک، یک دایره می‌کشیم. شش تفرقک کوچکی را که در شکل نیستند، پاک می‌کنیم (اگر قبل از پاک کردن، قسمتی از آن‌ها از بین رفته بود، دور دایره‌ی متناظرشان یک تفرقک می‌کشیم تا دوباره تفرقک کامل شود، سپس تفرقک را پاک می‌کنیم). ممکن است پس از انجام این کار، برخی از تفرقک‌های کوچک مطلوب نیز ناقص شوند. دایره‌ی این تفرقک‌های مطلوب ناقص را در نظر گرفته و با کشیدن یک تفرقک دور آن‌ها، تفرقک را کامل می‌کنیم. در انتها تمام دایره‌ها را پاک می‌کنیم.
- اثبات ریسمانی نبودن شکل پایین_چپ: بدون از دست دادن کلّیت مسئله فرض کنید اندازه‌ی ضلع تفرقک آغازین برابر ۱ و مختصات رأس پایین_چپ آن برابر $(0, 0)$ باشد. در این صورت مختص y پایین‌ترین نقطه‌ی هر دایره یا تفرقک جدیدی که به وجود می‌آید، به صورت $a + b\sqrt{2}$ است که a و b اعدادی گویا هستند. هم‌چنین شعاع هر دایره‌ی جدید و ضلع هر تفرقک جدید نیز به همین صورت است. در شکل داده شده، سه دایره‌ی کشیده شده را در نظر بگیرید. اگر مختص y پایین‌ترین نقطه‌ی دو دایره‌ی

پایین $a + b\sqrt{۲}$ و شعاع دایره برابر $a' + b'\sqrt{۲}$ باشد، مختص y پایین‌ترین نقطه‌ی دایره‌ی بالا برابر $a + b\sqrt{۲} + (a' + b'\sqrt{۲})\sqrt{۳}$ است. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند.

□

۱۳ شکل زیر را در نظر بگیرید:



به چند طریق می‌توان سه خانه را قرمز، سه خانه را سبز، سه خانه را زرد و یک خانه را آبی کرد، طوری که هیچ دو خانه‌ی هم‌رنگی هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند؟

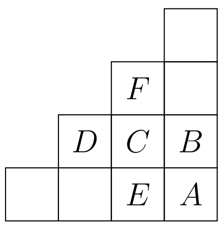
۱) ۱۶   ۲) ۱۲   ۳) ۶   ۴) ۳۰   ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

در سطر پایین و ستون راست، دقیقن یک خانه از هر کدام از رنگ‌ها داریم. با توجه به این که دقیقن یک خانه‌ی آبی وجود دارد، پس خانه‌ی A باید آبی باشد (در غیر این صورت دست کم دو خانه‌ی آبی جداگانه در سطر پایین و ستون راست خواهیم داشت). رنگ سه خانه‌ی B، C و D باید متفاوت باشد، پس $۳! = ۶$ حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید رنگ این سه خانه به ترتیب قرمز، سبز و زرد باشد. خانه‌ی E نمی‌تواند سبز باشد (زیرا یک خانه‌ی سبز هم‌ستون دارد). هم‌چنین اگر خانه‌ی E قرمز باشد، هیچ خانه‌ی دیگری نمی‌تواند قرمز باشد. پس این حالت هم منتفی است، زیرا سه خانه‌ی قرمز باید داشته باشیم. پس E حتمن زرد است. به استدلال مشابه F باید قرمز باشد. دو قسمت ۲×۱ در جدول باقی می‌ماند که هر کدام دو حالت برای رنگ‌آمیزی دارند، زیرا هر کدام یک خانه‌ی سبز دارند و با نشاندن خانه‌های سبز، رنگ بقیه‌ی خانه‌ها به طور یک‌تا تعیین می‌شود. پس در کل

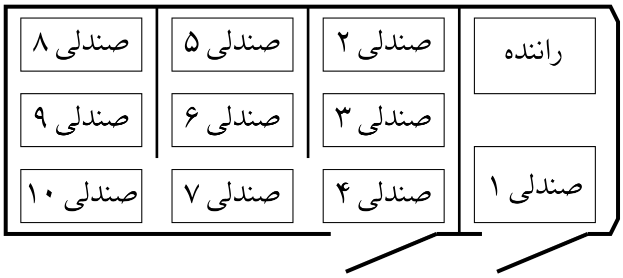
$$۳! \times ۲ \times ۲ = ۲۴$$

حالت داریم.



□

۱۴ «ون»، یک خودرو به شکل زیر با یک صندلی راننده و ۱۰ صندلی مسافر است که دو در دارد:



با توجه به محدودیت درها، هنگام پیاده شدن هر کس، باید صندلی‌های موجود در مسیر تا رسیدن به در خودرو، خالی باشد. برای مثال هنگام پیاده شدن مسافر صندلی ۵، اگر روی صندلی‌های ۴، ۶ و ۷ مسافری باشد، باید ابتدا این مسافرین پیاده شوند تا مسافر صندلی ۵ بتواند از خودرو خارج شود. توجه کنید خطوط سیاه پررنگ شکل، مانع هستند و مسافران نمی‌توانند از آن‌ها رد شوند. قرار است این ون در طول یک جاده‌ی مستقیم حرکت کند. ۱۰ مسافر می‌خواهند در ۱۰ جای مختلف از این جاده پیاده شوند. به چند طریق این ۱۰ نفر در ابتدای مسیر می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند، طوری که هنگام پیاده شدن هیچ کسی، فرد دیگری مجبور به پیاده شدن نباشد؟

۱) ۵۶۰۰   ۲) ۵۶۰   ۳) ۲۸۰۰   ۴) ۳۶۰۰   ۵) ۵۱۴۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

فردِ روی صندلی ۱ مستقل از بقیه به ۱۰ حالت انتخاب می‌شود. در میان بقیه‌ی افراد، فردی که زودتر از همه پیاده می‌شود، باید روی صندلی شماره ۴ بنشیند. به $\binom{8}{2}$ حالت برای صندلی‌های ۲ و ۳، دو نفر از هشت نفر باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم و به طور یک‌تا در این دو صندلی می‌نشانیم (آن که زودتر پیاده می‌شود، روی صندلی سه می‌نشیند). در میان افراد باقی‌مانده، فردی که زودتر از همه پیاده می‌شود، باید روی صندلی ۷ بنشیند. مانند استدلال قبل $\binom{5}{2}$ حالت برای صندلی‌های ۵ و ۶ داریم و سه نفر باقی‌مانده به طور یک‌تا روی صندلی‌های ۸ و ۹ و ۱۰ می‌نشینند. پس تعداد روش‌ها برابر

$$10 \times \binom{8}{2} \times \binom{5}{2} = 2800$$

است. □

۱۵ جدولی 3×3 داریم که ۹ شیء مختلف در خانه‌های آن قرار گرفته‌اند. در هر مرحله می‌توان یکی از دو کار زیر را انجام داد:

- یک خانه‌ی گوشه را در نظر بگیریم و شیء آن را با شیء یکی از دو خانه‌ی مجاورش جابه‌جا کنیم.
- سطر وسط یا ستون وسط را در نظر بگیریم و ترتیب اشیاء در آن را وارون کنیم.

یک جدول را **سلطانی** گوییم، اگر بتوان آن را با دقیقن ۱۳۹۵ مرحله ساخت. چند جدول سلطانی مختلف داریم؟

۱) $9!$ ۲) $\frac{8!}{2}$ ۳) $4!4!2!2!$ ۴) $\frac{8!}{3!}$ ۵) $8!$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

در یک جایگشت از اعداد، هر گاه عدد A قبل از عدد B آمده باشد، امّا $A > B$ باشد، گوییم یک **وارونگی** رخ داده است.
بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید اشیاء برابر اعداد ۱، ۲، ... و ۹ بوده و در ابتدا به ترتیب زیر در جدول قرار گرفته باشند:

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

عدد ۵ هم‌واره سر جای خود باقی می‌ماند. هم‌چنین اگر با گذاشتن سطرهای جدول به دنبال هم، عناصر جدول را به شکل یک جایگشت ببینیم (که در ابتدا برابر جایگشت مرتّب شده است)، زوجیّت تعداد وارونگی‌ها تغییر می‌کند (بررسی گام‌ها و تغییرات تعداد وارونگی‌ها به خواننده واگذار می‌شود). از آن‌جایی که تعداد وارونگی‌ها در ابتدا زوج و تعداد مراحل فرد است، در انتها باید تعداد وارونگی‌ها فرد باشد. پس به حداکثر $\frac{۸!}{۲}$ جدول مختلف می‌توانیم برسیم.
حال ثابت می‌کنیم به هر جدولی که تعداد وارونگی‌های‌ش فرد باشد، می‌توان رسید. هر دو عنصر در جدول (به جز ۵) را می‌توان با حداکثر پنج گام جابه‌جا کرد، طوری که ترتیب بقیه‌ی عناصر با هم نریزد. پس می‌توان با حداکثر هشت جابه‌جایی عنصر (یعنی حداکثر ۵×۸ مرحله) از جایگشت ابتدایی به هر جایگشت دل‌خواه رسید. با توجه به فرد بودن تعداد وارونگی‌های جایگشت مقصد، تعداد مراحل طی شده تا رسیدن به آن جایگشت با الگوریتم گفته شده، فرد است. پس از رسیدن به جایگشت دل‌خواه، دو عنصر قابل جابه‌جایی با گام نوع ۱ در نظر گرفته و مرتّبن آن‌ها را جابه‌جا می‌کنیم تا ۱۳۹۵ مرحله انجام شود. تعداد مراحل انجام این قسمت زوج است، پس عملن پس از پایان کار، مراحل این قسمت تغییری در جایگشت ایجاد نمی‌کند. پس در انتها به جایگشت مورد نظر می‌رسیم.
پس پاسخ برابر $\frac{۸!}{۲}$ است. □

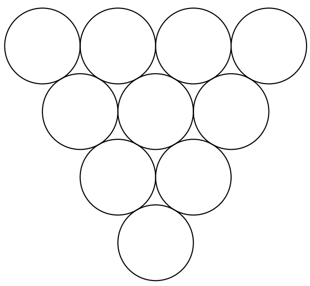
۱۶ جایگشتی تصادفی از اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰۰ داریم. به چه احتمالی تعداد اعداد بین ۱ و ۲ زوج است؟

۱) $\frac{۵۰}{۹۹}$ ۲) $\frac{۴۹}{۹۹}$ ۳) $\frac{۵۱}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$ ۵) $\frac{۴۹}{۱۰۰}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

عدد ۱ در هر کجای جایگشت باشد، برای جای‌گاه عدد ۲، از ۹۹ انتخاب ممکن ۵۰ انتخاب مطلوب داریم. پس پاسخ برابر $\frac{۵۰}{۹۹}$ است. □

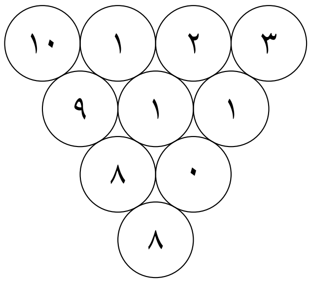
۱۷ در چهار دایره‌ی بالای شکل زیر، چهار عدد طبیعی متمایز کم‌تر از ۱۱ می‌نویسیم. عدد هر دایره‌ی دیگر برابر با قدر مطلق تفاضل دو دایره‌ی بالایی خود است. بیشینه‌ی عدد پایین‌ترین دایره چیست؟



۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در ردیف دوم، اعداد از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ هستند. پس در ردیف سوم، اعداد از مجموعه‌ی $\{۰, \ldots, ۸\}$ هستند. بنابراین عدد پایین‌ترین دایره نمی‌تواند از ۸ بیش‌تر باشد.
حال مثالی برای ۸ ارائه می‌دهیم:



□

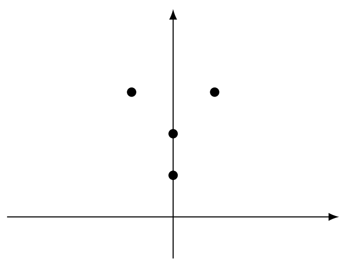
۱۸ در ابتدا یک مهره روی نقطه‌ی $(۰, ۰)$ صفحه‌ی مختصات قرار داده شده است. در هر مرحله می‌توان یک مهره با مختصات (x, y) به همراه یک عدد طبیعی n انتخاب کرده و پس از برداشتن مهره‌ی مذکور، در هر یک از نقطه‌های

$$(x, y+۱), (x, y+۲), \ldots, (x, y+n-۱)$$

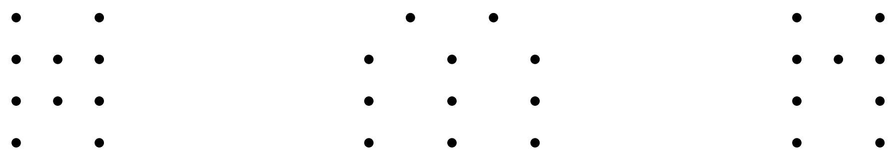
و هم‌چنین نقطه‌های

$$(x-۱, y+n), (x+۱, y+n)$$

یک مهره قرار داد. گام‌ها باید طوری انجام شود که در هر لحظه در هر نقطه حداکثر یک مهره باشد. برای مثال در گام نخست با انتخاب تنها مهره‌ی موجود و $n = ۳$، صفحه به شکل زیر در می‌آید:



با انجام تعدادی مرحله، به کدام اشکال زیر می‌توان رسید؟ (محورهای مختصات کشیده نشده است. شکل در هر جایی از صفحه ایجاد شود، قابل قبول است).



شکل ۱   شکل ۲   شکل ۳

۱) شکل ۲   ۲) هیچ یک از شکل‌ها   ۳) هر سه شکل   ۴) شکل‌های ۱ و ۳   ۵) شکل ۱

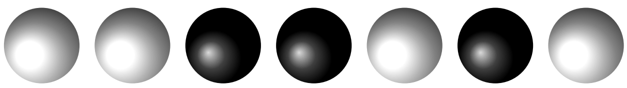
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به هر نقطه از صفحه با مختصات (x,y) عدد ۲^y را نسبت می‌دهیم. با انجام هر گام، مجموع اعداد نقاط مهره‌دار تغییری نمی‌کند. در ابتدا این مقدار برابر ۱ است، پس در انتها نیز باید برابر ۱ باشد. در شکل‌های ۲ و ۳ مقدار گفته شده نمی‌تواند به صورت ۲^t باشد، پس رسیدن به این دو شکل امکان ندارد. با اعمال زیر می‌توان شکل ۱ را ساخت:

۱. انتخاب مهره‌ی روی نقطه‌ی $(۰,۰)$ با $n=۲$
۲. انتخاب مهره‌ی روی نقطه‌ی $(۰,۱)$ با $n=۲$
۳. انتخاب مهره‌ی روی نقطه‌ی $(۰,۲)$ با $n=۲$
۴. انتخاب مهره‌ی روی نقطه‌ی $(۰,۳)$ با $n=۲$

□

۱۹ هفت مهره‌ی سیاه و سفید به ترتیب زیر در یک ردیف قرار دارند:



مرتضی و *ابوالفضل* با هم بازی می‌کنند. هر کس در نوبت‌ش یکی از مهره‌های کناری ردیف را برای خود برمی‌دارد. هر دو نفر دوست دارند مهره‌های سیاه بیش‌تری در انتها داشته باشند. ابوالفضل بازی را آغاز می‌کند. پس از هفت مرحله بازی تمام می‌شود و ابوالفضل چهار مهره و مرتضی سه مهره خواهد داشت. اگر هر دو نفر به به‌ترین شکل ممکن بازی کنند، در انتها ابوالفضل چند مهره‌ی **سفید** خواهد داشت؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۰   ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم ابوالفضل می‌تواند دست کم یک توپ سیاه در انتها داشته باشد. او توپ سمت چپ را برمی‌دارد. حال مرتضی هر توپی بردارد، یک توپ سیاه قابل برداشتن برای ابوالفضل می‌شود.
حال ثابت می‌کنیم مرتضی می‌تواند دست کم دو توپ سیاه در انتها داشته باشد. پس از برداشتن نخستین توپ توسّط ابوالفضل، مرتضی توپ‌ها را در ذهن خود به طور یک در میان در دو دسته‌ی A و B می‌گذارد. یکی از دو دسته شامل دو توپ سیاه است. بدون از دست دادن کلّیت مسئله فرض کنید A چنین باشد. مرتضی همواره می‌تواند یک توپ از دسته‌ی A بردارد و ابوالفضل مجبور است از دسته‌ی B بردارد. پس در انتها تمام توپ‌های دسته‌ی A برای مرتضی خواهد شد و او دو توپ سیاه خواهد داشت.
با توجه به دو حکم بالا، اگر هر دو نفر بهینه بازی کنند، در انتها دو توپ سیاه در اختیار مرتضی و یک توپ سیاه در اختیار ابوالفضل خواهد بود. پس ابوالفضل سه توپ سفید خواهد داشت. □

۲۰ یک جدول ۳×۳ داریم. دو خانه را **مجاور** گوییم، هر گاه یک ضلع مشترک داشته باشند. می‌خواهیم در هر یک از خانه‌های جدول، یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ را بنویسیم، طوری که عدد هر خانه برابر با تعداد اعداد ۱ در خانه‌های مجاورش باشد. خانه‌ی مرکزی چه اعدادی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳   ۲) هر سه عدد   ۳) ۲   ۴) ۲ و ۳   ۵) هیچ یک از سه عدد نمی‌توانند در خانه‌ی وسط باشند

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

خانه‌های گوشه تنها می‌توانند شامل اعداد ۱ و ۲ باشند. ادّعا می‌کنیم حداکثر یکی از گوشه‌ها می‌تواند شامل عدد ۲ باشد. فرض کنید در دست کم دو گوشه، عدد ۲ نوشته باشیم. دو حالت داریم:

- دو گوشه‌ی واقع در یک ضلع با عدد ۲ داریم. تمام خانه‌های مجاور این دو عدد، باید شامل عدد ۱ باشند. پس چنین شکلی داریم:

۲	۱	
۱		
۲	۱	

اکنون خانه‌ی وسط جدول بزرگ‌تر از ۱ است. در این صورت عدد ۱ مشخص شده با رنگ قرمز، عدد ۱ مجاور ندارد. تناقض حاصل ثابت می‌کند این حالت امکان ندارد.

- دو گوشه‌ی واقع در یک قطر با عدد ۲ داریم. در این صورت نیز چنین شکلی داریم:

	۱	۲
۱		۱
۲	۱	

اکنون عدد وسط جدول باید ۴ باشد که امکان ندارد.

پس جدولی با خواصّ گفته شده وجود ندارد. □

۲۱ یک جدول ۵ × ۴ داریم در هر یک از خانه‌های آن عدد ۰ نوشته شده است. ایلیچ الگوریتم زیر را انجام می‌دهد:

۱. به ازای هر سطر از بالا به پایین انجام بده:

۱-۱. به ازای هر ستون از چپ به راست انجام بده:

۱-۱-۱. خانه‌ی واقع در سطر و ستون گفته شده را در نظر بگیر. سطر یا ستون آن را انتخاب کن و تمام خانه‌های سطر یا ستون انتخاب شده را برعکس کن (از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰).

از میان تمام ۲

۱) ۴۰۹۶   ۲) ۲۵۶   ۳) ۵۱۲   ۴) ۸۱۹۲   ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

یک خانه که ستونش را تغییر داده سفید و در غیر این صورت آن را سیاه می‌کنیم. اگر ستونی داشته باشیم که تعداد زوجی خانه‌ی سفید داشته باشد، باید تمام سطرها شامل تعداد فردی خانه‌ی سیاه باشند (تا خانه‌های آن ستون برابر ۱ شود). به همین ترتیب برای ستون با تعداد فردی خانه‌ی سفید می‌توان حکم مشابهی گفت. با در نظر گرفتن حکمی مشابه (با در نظر گرفتن یک سطر) نیز، نتیجه می‌گیریم تنها یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

- تمام ستون‌ها شامل فرد خانه‌ی سفید و تمام سطرها شامل زوج خانه‌ی سیاه هستند. امکان رخ دادن این حالت وجود ندارد، زیرا

مجموع تعداد خانه‌های سفید ستون‌ها+مجموع تعداد خانه‌های سیاه سطرها = تعداد کلّ خانه‌های جدول

و در این حالت تعداد کلّ خانه‌های جدول فرد خواهد شد.

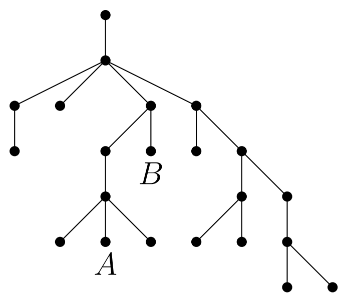
- تمام ستون‌ها شامل زوج خانه‌ی سفید و تمام سطرها شامل فرد خانه‌ی سیاه هستند. برای شمردن حالات مطلوب این قسمت، ابتدا تمام خانه‌های جدول جز ستون و سطر آخر را به $۲^{۱۲}$ حالت رنگ می‌کنیم. حال رنگ سه خانه‌ی نخست ستون آخر و چهار خانه‌ی نخست سطر آخر به طور یکتا مشخص می‌شود. اکنون تمام خانه‌ها به جز خانه‌ی واقع در سطر و ستون آخر رنگ شده‌اند. دو حالت داریم:

  - در ۱۲ خانه‌ی ابتدایی رنگ شده تعداد فردی خانه‌ی سیاه و تعداد فردی خانه‌ی سفید داشته باشیم. در این صورت باید سه خانه‌ی نخست ستون آخر شامل تعداد زوجی خانه‌ی سیاه (و در نتیجه تعداد فردی خانه‌ی سفید) باشند. به همین ترتیب، چهار خانه‌ی نخست سطر آخر شامل تعداد فردی خانه‌ی سفید (و در نتیجه تعداد فردی خانه‌ی سیاه) هستند. پس تنها خانه‌ی رنگ نشده به طور یکتا باید سفید شود.
  - در ۱۲ خانه‌ی ابتدایی رنگ شده تعداد زوجی خانه‌ی سیاه و تعداد زوجی خانه‌ی سفید داشته باشیم. در این صورت باید سه خانه‌ی نخست ستون آخر شامل تعداد فردی خانه‌ی سیاه (و در نتیجه تعداد زوجی خانه‌ی سفید) باشند. به همین ترتیب، چهار خانه‌ی نخست سطر آخر شامل تعداد زوجی خانه‌ی سفید (و در نتیجه تعداد زوجی خانه‌ی سیاه) هستند. پس تنها خانه‌ی رنگ نشده به طور یکتا باید سیاه شود.

  پس در هر صورت تنها خانه‌ی رنگ نشده از جدول به طور یکتا رنگ می‌شود.

پس پاسخ برابر $۲^{۱۲} = ۴۰۹۶$ است. □

۲۲ درخت زیر را در نظر بگیرید. یک یال را **زرد** می‌نامیم، اگر به یک رأس درجه‌ی ۱ وصل باشد. یک رأس را **شل** می‌نامیم، اگر دست کم دو یال زرد به رئوس مسیر آن به ریشه (رأس بالا) وصل باشند (به جز یال خود رأس و یال متصل به ریشه). برای مثال A در ابتدا شل است، زیرا ۴ یال زرد به رئوس مسیر آن تا ریشه وصل هستند؛ امّا رأس B در ابتدا شل نیست.

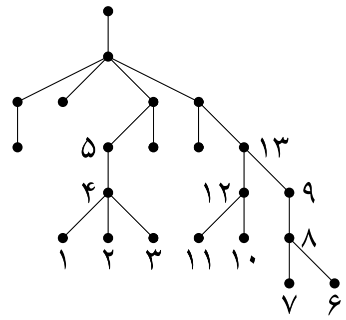


در هر مرحله می‌توان یک رأس شل در نظر گرفته و از درخت حذف کرد. توجه کنید ممکن است رأسی در ابتدا شل نباشد، امّا پس از تعدادی مرحله شل شود. حداکثر چند رأس می‌توان از درخت حذف کرد؟

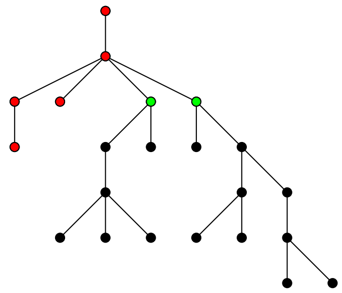
۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰ ۵) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر به ترتیب شماره‌های زیر، رئوس را حذف کنیم، ۱۳ رأس حذف می‌شوند:

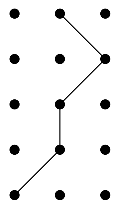


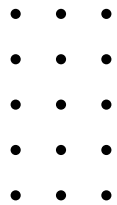
حال ثابت می‌کنیم هیچ‌گاه نمی‌توان بیش از ۱۳ رأس حذف کرد. شکل زیر را در نظر بگیرید:



رئوس قرمز و سبز و هم‌چنین دست کم یکی از دو فرزند هر کدام از رئوس سبز هیچ‌گاه حذف نمی‌شوند. این یک ناورداست (اگر در یک مرحله این حکم برقرار باشد، در مرحله‌ی بعد نیز برقرار است). پس حداکثر ۱۳ رأس برای حذف شدن باقی می‌ماند. □

۲۳ شکل سمت راست را در نظر بگیرید:





سلطان از نقطه‌ی A شروع به کشیدن یک خط شکسته می‌کند. او در هر مرحله نقطه‌ی کنونی را در نظر گرفته و با کشیدن یک پاره‌خط، به یکی از نقاط بالا، بالا_راست یا بالا_چپ (در صورت وجود) می‌رود. پس از چهار مرحله، او به یکی از نقاط بالایی شکل می‌رسد. برای مثال سلطان می‌تواند مسیرش را مانند شکل سمت چپ بکشد. سپس *ایلیچ* مسیری دیگر با شروع از نقطه‌ی B رسم می‌کند. به چند طریق این کار ممکن است، طوری که دو مسیر کشیده شده در هیچ جایی (چه روی نقاط شکل و چه جای دیگر) یک‌دیگر را قطع نکنند؟

۱) ۱۳　　۲) ۹۶　　۳) ۵۵　　۴) ۲۷　　۵) ۸۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

دو مسیر را با هم جلو می‌بریم. برای بالا بردن دو مسیر در یک مرحله، در هر صورت سه حالت داریم (بررسی حالات به خواننده واگذار می‌شود). با توجه به این که تعداد مراحل چهار تاست، پس در کل $۳^{۴} = ۸۱$ حالت داریم. □

۲۴ پس از اجرای الگوریتم زیر، مقدار S چه خواهد بود؟

۱ S را برابر ۰ قرار بده.
۲ به ازای i از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۲-۱. به ازای j از ۰ تا ۳۱ انجام بده:

۲-۱-۱. اگر $(i\ XOR\ j)$ از i بزرگ‌تر شد، S را یک واحد زیاد کن.

۱) ۳۴۱ ۲) ۹۹۲ ۳) ۸۳ ۴) ۴۹۶ ۵) ۴۵۱

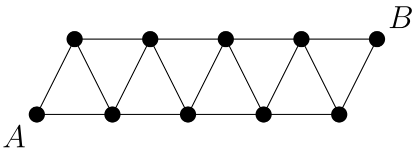
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تمام اعداد را به صورت اعداد پنج رقمی در نمایش مبنای ۲ می‌بینیم. فرض کنید $a = (i\ XOR\ j)$ و بیت k ام (از سمت چپ) نخستین بیتی باشد که در عدد i برابر ۰ و در j برابر ۱ است (باید چنین بیتی موجود باشد، در غیر این صورت $i < a$ نمی‌شود). برای آن که $i < a$ باشد، باید تا قبل از بیت k ام، این حالت رخ ندهد که بیت متناظر در هر دو عدد i و j برابر ۱ باشد. پس $۲^{۹-k} = ۴^{۵-k} \times ۲^{k-۱}$ حالت داریم. با در نظر گرفتن k های مختلف، پاسخ برابر

$$۲^{۸} + ۲^{۷} + ۲^{۶} + ۲^{۵} + ۲^{۴} = ۴۹۶$$

است. □

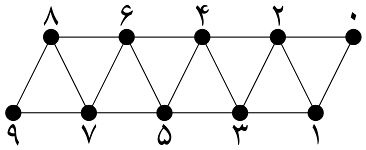
۲۵ گراف زیر چند مسیر از A به B دارد؟ توجه کنید یک مسیر نمی‌تواند رأس یا یال تکراری داشته باشد.



۱) ۲۷۴ ۲) ۸۱ ۳) ۴۴ ۴) ۶۸ ۵) ۱۴۹

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

رئوس را به شکل زیر شماره‌گذاری می‌کنیم:



g_n را تعداد مسیرهای از رأس n به B تعریف می‌کنیم، طوری که از گام به صورت $\leftarrow$ استفاده نشود. پاسخ در انتها برابر $g_۹$ خواهد بود. با کمی بررسی متوجّه می‌شویم:

$$g_n = g_{n-۱} + g_{n-۲} + g_{n-۳}$$

حال از آن‌جایی که $g_۰ = ۱$، $g_۱ = ۱$ و $g_۲ = ۲$ داریم:

$$g_۳ = ۴ \Rightarrow g_۴ = ۷ \Rightarrow g_۵ = ۱۳ \Rightarrow g_۶ = ۲۴ \Rightarrow g_۷ = ۴۴ \Rightarrow g_۸ = ۸۱ \Rightarrow g_۹ = ۱۴۹$$

پس پاسخ برابر ۱۴۹ است. □

۲۶ کیوان و پیمان به نوبت با هم بازی می‌کنند. آن‌ها در ابتدا یک کیسه شامل n سنگ‌ریزه دارند. بازی را کیوان شروع می‌کند. کیوان در هر نوبت‌ش می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ سنگ‌ریزه از کیسه خارج کند، در حالی که پیمان در هر نوبت‌ش می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ سنگ‌ریزه بردارد. برنده‌ی بازی کسی است که آخرین سنگ‌ریزه را از کیسه خارج کند. اگر هر دو نفر به صورت بهینه بازی کنند، به ازای $n = ۱۰$، $n = ۱۳۹۵$ و $n = ۲۰۱۶$ به ترتیب چه کسی بازی را می‌برد؟

۱) کیوان، پیمان، کیوان ۲) پیمان، کیوان، پیمان ۳) پیمان، پیمان، پیمان ۴) کیوان، کیوان، کیوان ۵) پیمان، پیمان، کیوان

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم به ازای هر $n \geqslant ۳$ پیمان بازی را می‌برد. برای پایه‌ی استقرا به ازای $n = ۳, ۴, ۵$ پیمان بازی را می‌برد (بررسی حالات به خواننده واگذار می‌شود). حال به ازای هر $n \geqslant ۶$ اگر کیوان k سنگ‌ریزه برداشت، پیمان $۳ - k$ سنگ‌ریزه برمی‌دارد. گویی بازی به ازای $n - ۳$ سنگ‌ریزه از ابتدا آغاز شده است که پیمان طبق فرض استقرا استراتژی برد دارد. □

۲۷ یک گراف کامل ۱۱ رأسی با رأس‌های ۰، ۱، ... و ۱۰ داریم. روی یال بین رأس‌های i و j مقدار باقی‌مانده‌ی $i+j$ در تقسیم بر ۱۱ را نوشته‌ایم. می‌خواهیم یک زیردرخت فراگیر از این گراف انتخاب کنیم، طوری که مجموع اعداد یال‌های آن کمینه باشد. این مقدار کمینه چیست؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۶ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

تعداد یال‌های درخت برابر ۱۰ است. گراف پنج یال با عدد ۰ دارد. پس پاسخ نمی‌تواند از $۵ \times ۰ + (۱۰ - ۵) \times ۱ = ۵$ کم‌تر باشد.
حال اگر یال‌های زیر را به عنوان یال‌های درخت در نظر بگیریم، مجموع اعداد یال‌های درخت برابر ۵ خواهد شد:

$$۱ \leftrightarrow ۱۰ \qquad ۲ \leftrightarrow ۹ \qquad ۳ \leftrightarrow ۸ \qquad ۴ \leftrightarrow ۷ \qquad ۵ \leftrightarrow ۶$$

$$۰ \leftrightarrow ۱ \qquad ۲ \leftrightarrow ۱۰ \qquad ۳ \leftrightarrow ۹ \qquad ۴ \leftrightarrow ۸ \qquad ۵ \leftrightarrow ۷$$

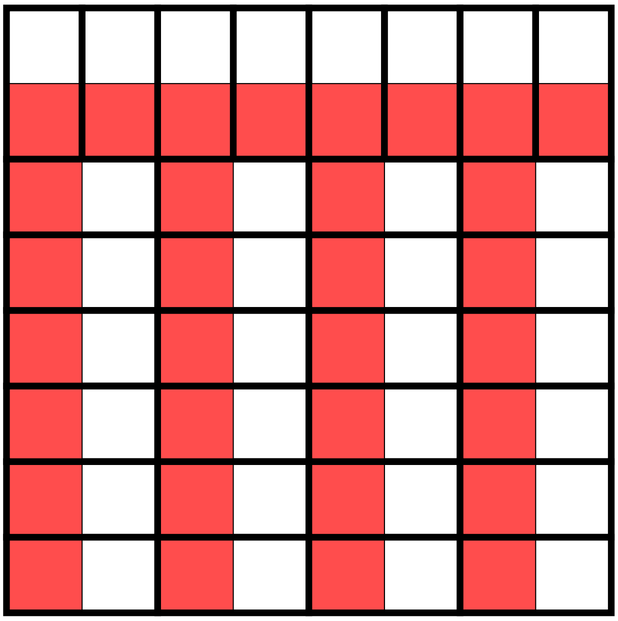
پس پاسخ برابر ۵ است. □

۲۸ مرتضی یک جدول ۸×۸ را با دومینو (کاشی‌های ۲×۱) پوشانده و از هر دومینو یک خانه را سیاه و یک خانه را سفید کرده است. گوییم دو خانه‌ی سیاه A و B **دوست** هستند، هر گاه بتوان از A شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور (مشترک در ضلع) سیاه رفته و پس از تعدادی مرحله به B رسید. مجموعه‌ای از خانه‌های سیاه را **دیدنی** گوییم، هر گاه هر دو خانه‌ی مجموعه، دوست باشند. بیشینه‌ی ممکن تعداد خانه‌های یک مجموعه‌ی دیدنی چیست؟

۱) ۳۲ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

واضح است که جواب از ۳۲ بیش‌تر نیست، زیرا ۳۲ دومینو داریم. جدول زیر نیز مثالی برای یک مجموعه‌ی دیدنی با ۳۲ خانه است)جهت وضوح، به جای سیاه از قرمز استفاده کرده‌ایم):



□

در منطقه‌ای در نزدیکی شهر لندن، قتلی توسط سه نفر اتّفاق افتاده است. سلطان به سرعت وارد عمل شد و پنج متّهم (A، B، C، D، E) را دستگیر کرد. هر یک از آن‌ها ادّعا کرد که قاتل نیست، ولی نام دو نفر از چهار نفر دیگر را به عنوان کسانی که به احتمال زیاد قاتل هستند، به زبان آورد. سلطان متوجّه شد که هر یک از قاتل‌ها برای رد گم کردن، نام دقیقن یک قاتل دیگر را بر زبان آورده است و هر یک از بی‌گناهان نیز نام دو قاتل را گفته است. در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید سلطان چند نفر را به طور قطع می‌تواند قاتل معرفی کند؟

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۹ اظهارات:

- A: B و C قاتل هستند.
- B: A و C قاتل هستند.
- C: B و E قاتل هستند.
- D: E و C قاتل هستند.
- E: B و D قاتل هستند.

۱) ۰   ۲) چنین چیزی ممکن نیست   ۳) ۲   ۴) ۱   ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

حتمن C قاتل است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت A، B و D قاتل هستند، زیرا ادّعا کرده‌اند C قاتل است. E نیز باید قاتل باشد، زیرا C چنین ادّعایی دارد. پس چهار قاتل داریم که تناقض است. تناقض حاصل ثابت می‌کند که C باید قاتل باشد.
حال ثابت می‌کنیم B نیز حتمن قاتل است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت A، C و E باید قاتل باشند، زیرا ادّعا کرده‌اند B قاتل است. پس D نباید قاتل باشد، زیرا سه قاتل دیگر تا کنون مشخص شده است. حال در ادّعای E هیچ قاتلی وجود ندارد که امکان ندارد. تناقض حاصل ثابت می‌کند که B باید قاتل باشد.

با توجه به اظهارات درست A، می‌فهمیم که او قاتل نیست. با توجه به اظهارات C می‌فهمیم E قاتل نیست. پس قاتل سوم (D) نیز مشخّص می‌شود.
پس وضعیّت همه مشخّص شد و پاسخ برابر ۳ است. □

۳۰ اظهارات:

- A: B و C قاتل هستند.
- B: A و C قاتل هستند.
- C: B و A قاتل هستند.
- D: E و B قاتل هستند.
- E: C و D قاتل هستند.

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۰   ۴) چنین چیزی ممکن نیست   ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

حتمن C قاتل است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت A، B و E قاتل هستند، زیرا ادّعا کرده‌اند C قاتل است. D قاتل نیست، زیرا تا کنون سه قاتل دیگر پیدا کرده‌ایم. در اظهارات E هیچ قاتلی نیست که امکان ندارد. تناقض حاصل ثابت می‌کند که C باید قاتل باشد.
به استدلال مشابه B نیز قاتل است. با توجه به اظهارات درست A او قاتل نیست. حال هر کدام از D و E می‌توانند قاتل سوم باشند. پس پاسخ برابر ۲ است. □