پاسخ تشریحی

دهمین المپیاد کامپیوتر

۱. معلوم است که در هر مرحله مجموع اعداد روی دایره ثابت می‌ماند. در ابتدا مجموع کل اعداد برابر با $\frac{۷۹ \times ۷۸}{۲}$؛ یعنی ۳۰۸۱ می‌باشد. بنابراین این عدد، عدد نهایی است که در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد.

۲. در جدول زیر ● نشانگر مرخصی و × نشانگر روز کاری است:

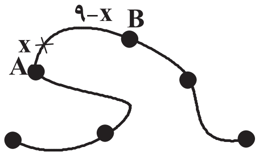
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
علی	×	●	×	●	×	●	×	●	×	●	×	●
حسین	×	×	×	×	●	●	×	×	×	×	×	●
مجید	×	×	×	●	×	×	×	●	×	×	×	●

معلوم است که پس از یازده روز هر سه نفر در مرخصی به‌سر می‌برند.

۳. اگر پمپ بنزین در نقطه‌ای بین دو شهر A و B واقع باشد بهینه است. در این حالت y برابر با:

$x + (۱۰ + x) + (۱۶ + x) + (۹ - x) + (۱۷ - x) + (۲۴ - x)$؛

یعنی ۷۶ می‌باشد.



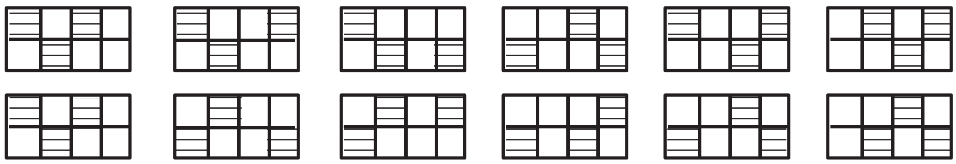
منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

۴. تعداد حالاتی که صفر خانه علامت زده شده باشد برابر $\binom{8}{0}$ یعنی ۱ می‌باشد.

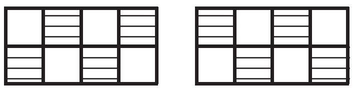
تعداد حالاتی که یک خانه علامت زده شده باشد برابر $\binom{8}{1}$ یعنی ۸ می‌باشد.

تعداد حالاتی که دو خانه علامت زده شده باشد برابر $\binom{8}{2}$ یعنی ۲۸ می‌باشد که در ده مورد خانه‌ها مجاور هستند و ۱۸ مورد از آن مطلوب می‌باشد.

تعداد حالاتی که سه خانهٔ علامت زده شده مطلوب باشند برابر ۱۲ می‌باشد که به شکل زیر می‌باشند:



و بالاخره تعداد حالاتی که چهار خانه علامت زده شده باشند برابر ۲ می‌باشد که به شکل زیر می‌باشند:



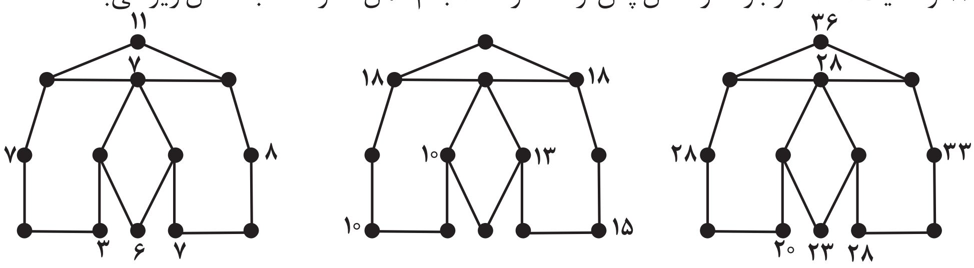
مجموع کل حالات اشاره شده ۴۱ می‌شود.

۵. به‌ازای هر سه نقطهٔ متمایز یک و فقط یک مثلث ایجاد خواهد شد که آن مثلث سه زاویهٔ کمتر از 180° داشته و مجموع آن سه زاویه 180° می‌باشد. بنابراین جواب مورد نظر برابر $180^\circ \times \binom{10}{3}$ ؛ یعنی ۲۱۶۰۰ می‌باشد.

۶. ابتدا مریم دو عدد ۱۸ و ۳۶ را انتخاب می‌کند. اگر $x = 18$ یا $x = 36$ که مسأله حل است و اگر غیر این باشد x در یکی از بازه‌های [۱ , ۱۷]، [۱۹ , ۳۵] یا [۳۷ , ۵۳] قرار دارد که هر یک از آن بازه‌ها دارای ۱۷ عضو بوده و شرایط یکسانی دارند. فرض می‌کنیم مهدی وجود x را در بازه اول اعلام کند، در این صورت مریم دو عدد ۶ و ۱۲ را انتخاب می‌کند. اگر $x = 6$ یا $x = 12$ که مسأله حل است و اگر غیر این باشد x در یکی از بازه‌های [۱ , ۵]، [۷ , ۱۱] یا [۱۳ , ۱۷] قرار دارد که هر یک از آن بازه‌ها دارای ۵ عضو بوده و شرایط یکسانی دارند. فرض می‌کنیم مهدی وجود x را در بازهٔ دوم اعلام کند، در این صورت مریم دو عدد ۸ و ۱۰ را انتخاب کرده و x را می‌یابد زیرا اگر $x = 8$ یا $x = 10$ که مسأله حل است و اگر غیر این باشد x یکی از سه عدد ۷، ۹ یا ۱۱ می‌باشد که مهدی آن را اعلام می‌کند.

۷. اگر در یکی از نقاط سطر اول یا سوم باشیم معلوم است که حرکت بعدی به یک طریق و اگر در یکی از نقاط سطر دوم باشیم حرکت بعدی به دو طریق قابل انجام است. (به غیر از ستون دهم که به ناچار باید به پایین برویم). یک در میان یعنی در حرکت‌های دوم، چهارم، ششم، هشتم و دهم در سطر دوم خواهیم بود که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر $۱^{۶} \times ۲^{۴} \times ۱$ خواهد بود.

۸. وضعیت اعداد موجود در شکل پس از سه مرحله انجام عمل ذکر شده به شکل زیر می‌باشد:



مرحلهٔ سوم　　مرحلهٔ دوم　　مرحلهٔ اول

همان‌طور که مشاهده می‌شود مجموع اعداد خواسته شده برابر ۲۸ + ۲۳ + ۲۰ + ۲۸ ؛ یعنی ۹۹ می‌باشد.

۹. برای آن که تیم چهارم حداکثر امتیاز را کسب کنید نتیجهٔ بازی‌ها باید مطابق جدول زیر باشد که در این صورت آن تیم ۶ امتیازی می‌باشد. و اما تیم چهارم نمی‌تواند ۷ امتیازی باشد زیرا در این صورت تیم سوم نیز علاوه بر دو تیم دوم و چهارم ۷ امتیازی خواهد بود که لازمه‌اش داشتن دو برد و یک تساوی توسط هر یک از آن تیم‌ها می‌باشد. بنابراین تیم اول سه برد، تیم‌های دوم، سوم و چهارم هر یک دو برد دارند که مجموعاً ۹ برد می‌شود. از طرف دیگر هر یک از سه تیم مورد اشاره یک تساوی دارند؛ یعنی نتیجهٔ حداقل دو بازی نیز تساوی بوده است که در این صورت تعداد بازی‌ها بیش از ۱۰ بازی می‌شود و تناقض ایجاد می‌کند، زیرا تعداد کل بازی‌های انجام شده برابر ۱۰ می‌باشد.

	A	B	C	D	E
A		B	A	A	A
B	B		C	B	—
C	A	C		D	C
D	A	B	D		D
E	A	—	C	D	

۱۰. بیشترین امتیاز کسب شده برابر ۱۶۰ و کمترین امتیاز کسب شده برابر ۴۰- می‌باشد. در بین همهٔ اعداد صحیح از ۴۰- تا ۱۶۰ به غیر از ۱۵۹، ۱۵۸، ۱۵۷، ۱۵۴، ۱۵۳ و ۱۴۹ همگی قابل کسب هستند، بنابراین در کل به تعداد ۶ - ۲۰۱ ؛ یعنی ۱۹۵ امتیاز متمایز می‌توانیم داشته باشیم. برای آن که مطمئن شویم حداقل دو نفر امتیاز یکسان دارند وجود حداقل ۱۹۶ نفر لازم است.

۱۱. می‌دانیم گزارهٔ شرطی «اگر p آنگاه q» فقط وقتی ارزش نادرستی دارد که p درست و q نادرست باشد. بنابراین اگر در آن گزاره ارزش p نادرست باشد بدون توجه به ارزش q می‌فهمیم که ارزش کل گزاره درست است. p را مقدم و q را پیرو می‌نامند.

از دو گزارهٔ الف و ب یکی درست می‌باشد، زیرا اگر ب نادرست باشد آن گاه گزارهٔ شرطی الف به خاطر نادرست بودن مقدمش درست خواهد بود. گزارهٔ ب نمی‌تواند درست باشد، زیرا در این صورت گزینهٔ الف و هر دو نادرست بوده (به‌خاطر این که فقط یکی از گزاره‌ها ارزش درست دارد) آنگاه به خاطر نادرست بودن مقدم گزارهٔ شرطی ج، آن گزارهٔ شرطی ارزش درست خواهد داشت که تناقض است. بنابراین گزینهٔ مورد نظر که ارزش درستی دارد گزینهٔ الف می‌باشد.

۱۲. برنامهٔ گزینهٔ الف از چپ به راست:

$ax^{۲} + bx + c = (a \times x + b) \times x + b$

Add a , Mul x , Add b , Mul x , Add b

برنامهٔ گزینهٔ ب از چپ به راست:

$(a + b)xy + ya = [(a + b) \times x + a] \times y$

Add a , Add b , Mul x , Add a , Mul y

برنامهٔ گزینهٔ د از چپ به راست:

$۳x^{۵} + ۱ = (((((۳ \times x) \times x) \times x) \times x) \times x) + ۱$

Add x , Mul ۳ , Mul x , Mul x , Mul x , Mul x , Add ۱

گزینهٔ ج را به‌صورت‌های اشاره شده نمی‌توان پرانتزگذاری کرد.

۱۳. هر عضو از آن ۱۰ عضو ۷ انتخاب زیر را مستقل از اعضای دیگر می‌تواند داشته باشد:

۱. متعلق به هیچ یک از سه زیرمجموعه نباشد.

۲. فقط متعلق به $A_۱$ باشد.

۳. فقط متعلق به $A_۲$ باشد.

۴. فقط متعلق به $A_۳$ باشد.

۵. به $A_۱$ و $A_۲$ متعلق بوده ولی به $A_۳$ متعلق نباشد.

۶. به $A_۱$ و $A_۳$ متعلق بوده ولی به $A_۲$ متعلق نباشد.

۵. به $A_۲$ و $A_۳$ متعلق بوده ولی به $A_۱$ متعلق نباشد.

بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات ممکن برابر $۷^{۱۰}$ می‌باشد.

۱۴. A و T را یار هم و C و G را نیز یار هم می‌نامیم. عضو اول ۴ حالت دارد. عضو دوم نمی‌تواند یار اولی باشد؛ یعنی ۳ حالت دارد. عضو سوم نمی‌تواند یار دومی باشد؛ یعنی این عضو نیز ۳ حالت می‌تواند داشته باشد و ... بنابراین تعداد حالات ممکن برابر $۳^۹ \times ۴$ می‌باشد. که متأسفانه در هیچ‌یک از گزینه‌ها نیامده است.

۱۵. اعداد یک، سه و پنج رقمی ارزش مثبت و مابقی اعداد ارزش منفی دارند. تعداد اعداد دو رقمی، چهار رقمی و شش رقمی که ارزش منفی دارند به‌ترتیب برابر ۹۰، ۹۰۰۰ و ۹۰۰۰۰۰ می‌باشد که مجموع آنها ۹۰۹۰۹۰ می‌شود.

۱۶.

$$\overline{۷a_n \ldots a_۳a_۲a_۱} = ۵ \times \overline{a_n \ldots a_۳a_۲a_۱۷} \Rightarrow a_۱ = ۵$$

$$\Rightarrow \overline{۷a_n \ldots a_۳a_۲۵} = ۵ \times \overline{a_n \ldots a_۳a_۲۵۷} \Rightarrow a_۲ = ۸$$

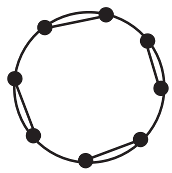
$$\Rightarrow \overline{۷a_n \ldots a_۳۸۵} = ۵ \times \overline{a_n \ldots a_۳۸۵۷} \Rightarrow a_۳ = ۲$$

$$\Rightarrow \overline{۷a_n \ldots ۲۸۵} = ۵ \times \overline{a_n \ldots ۲۸۵۷} \Rightarrow a_۴ = ۴$$

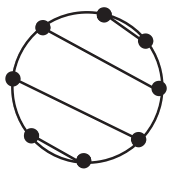
$$\Rightarrow \overline{۷a_n \ldots ۴۲۸۵} = ۵ \times \overline{a_n \ldots ۴۲۸۵۷} \Rightarrow a_n = ۱$$

در مرحلهٔ بعد رقم قبل از ۱ برابر ۷ به‌دست می‌آید به همین منظور رقم ۷ موجود در سمت چپ عدد را که از قبل موجود بود رقم مورد نظر در نظر می‌گیریم. بنابراین a_n همان a_5 می‌باشد. بنابراین عدد مورد نظر ۱۴۲۸۵۷ می‌باشد که یک عدد شش رقمی است.

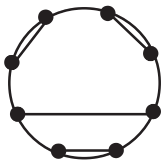
۱۷.

I. 

معلوم است که در این حالت با توجه به متمایز بودن ۸ نقطه تعداد شکل‌های حاصل برابر ۲ می‌باشد.

II. 

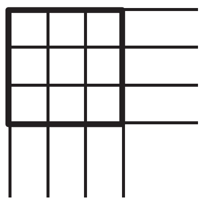
معلوم است که در این حالت با دوران وترها، به‌طوری که قیافهٔ شکل عوض نشود و فقط نقاط تغییر کنند ۴ شکل حاصل خواهد شد.

III. 

با دوران وترهای این شکل نیز ۸ شکل حاصل خواهد شد.

بنابراین مجموع حالات برابر ۸ + ۴ + ۲؛ یعنی ۱۴ خواهد شد.

۱۸. یک جدول ۳ × ۳ از گوشهٔ شبکه جدا می‌کنیم. هر یک از خانه‌های آن مستقل از دیگری دو حالت ۰ و ۱ می‌توانند داشته باشند، مابقی خانه‌ها وابسته به این که سه خانهٔ موجود در سمت چپ یا بالای آن چه اعدادی باشند منحصربه‌فرد تعیین خواهند شد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 2^9؛ یعنی ۵۱۲ می‌باشد.



۱۹. شرط لازم و کافی برای آن که به عدد ۱ برسیم آن است که تعداد ۱های عدد اولیه فرد باشد که تعداد این اعداد برابر با $\binom{10}{1}+\binom{10}{3}+\dots+\binom{10}{9}$؛ یعنی 2^9 می‌باشد.

۲۰. درجهٔ هر رأس از گراف به تعداد درجهٔ آن رأس در نوشتن A به کار می‌رود بنابراین اگر درجهٔ رئوس را $a_۱$، $a_۲$، ... ، a_n درنظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

$$A = a_۱ \times a_۱ + a_۲ \times a_۲ + ... + a_n \times a_n = \sum a_i^۲$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که :

$$B = \sum a_i^۲ + (\underbrace{۲^۲ + ۲^۲ + ... + ۲^۲}_{\text{۲۹ تا}})$$

$$\Rightarrow \quad B - A = ۲۹ \times ۴ = ۱۱۶$$

یادآوری می‌شود که تعداد یال‌های گراف داده شده برابر ۲۹ می‌باشد. همان طور که دیده می‌شود عدد به‌دست آمده در هیچ‌یک از گزینه‌ها نیامده است.

۲۱. معلوم است که کامیون از انبار ۱ که قرار است از حالت ABCD به حالت AAAA تبدیل شود، حداقل دوبار خارج و حداقل دو بار به آن انبار وارد خواهد شد. انبارهای ۲، ۳ و ۴ نیز چنین وضعیتی را دارند. بنابراین حداقل جابه‌جایی‌های لازم برابر $\frac{۴+۴+۴+۴}{۲}$ یعنی ۸ می‌باشد. اگر کامیون با الگوریتم زیر حرکت کند با ۸ بار جابه‌جایی می‌تواند به هدف برسد:

۱. بشکه‌های BC را از انبار ۱ به انبار ۲، منتقل کند.
۲. بشکه‌های CC را از انبار ۲ به انبار ۳، منتقل کند.
۳. بشکه‌های BD را از انبار ۳ به انبار ۴، منتقل کند.
۴. بشکه‌های BB را از انبار ۴ به انبار ۲، منتقل کند.
۵. بشکه‌های AD را از انبار ۲ به انبار ۱، منتقل کند.
۶. بشکه‌های DD را از انبار ۱ به انبار ۴، منتقل کند.
۷. بشکه‌های AC را از انبار ۴ به انبار ۳، منتقل کند.
۸. بشکه‌های AA را از انبار ۳ به انبار ۱، منتقل کند.

۲۲. راه حل اول: اگر تعداد مهره‌ها ۶ عدد باشد آنگاه به یک طریق می‌توان آنها را چید.

اگر تعداد مهره‌ها ۵ عدد باشد، آنگاه دو خانهٔ غیر مجاور باید خالی بمانند که به یکی از ۱۵ طریق زیر

ممکن است:

۱ - ۴ ۳ - ۶ ۵ - ۸ ۷ - ۱۰ ۹ - ۱۲

۱ - ۶ ۳ - ۸ ۵ - ۱۰ ۷ - ۱۲

۱ - ۸ ۳ - ۱۰ ۵ - ۱۲

۱ - ۱۰ ۳ - ۱۲

۱ - ۱۲

اگر تعداد مهره‌ها ۴ عدد باشد آنگاه چهار خانهٔ غیرمجاور باید خالی بمانند که به یکی از ۵ طریق زیر ممکن است.

۱ - ۴ - ۷ - ۱۰

۱ - ۴ - ۷ - ۱۲

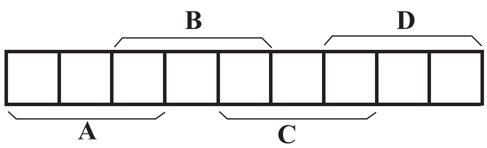
۱ - ۴ - ۹ - ۱۲

۱ - ۶ - ۹ - ۱۲

۳ - ۶ - ۹ - ۱۲

مجموع کل حالات مورد اشاره برابر ۵ + ۱۵ + ۱ ؛ یعنی ۲۱ می‌باشد.

راه حل دوم: تعداد طرق چیدن مهره‌های ۱ × ۲ در جدول ۱ × n را f_n می‌نامیم. هر یک از f_n طریق دو حالت می‌تواند داشته باشد. به این صورت که یا خانهٔ n ام آن خالی است و یا پر. در حالت اول خانه‌های (n - ۱) ام و (n - ۲) ام یقیناً پر هستند و از آن خانه به قبل نیز تعداد طرق چیدن‌ها برابر $f_{n-۳}$ می‌باشد. در حالت دوم نیز خانهٔ (n - ۱) ام یقیناً پر هست، بنابراین تعداد طرق چیدن مهره در سایر خانه‌ها برابر $f_{n-۲}$ می‌باشد، یعنی رابطهٔ $f_n = f_{n-۲} + f_{n-۳}$ برقرار است. چون f(۱) = ۱ ، f(۲) = ۱ و f(۳) = ۲ ، بنابراین با محاسبه، f(۱۲) برابر با ۲۱ به‌دست می‌آید.



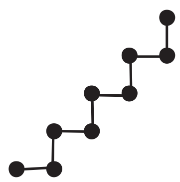
۲۳. معلوم است که باید در مرحلهٔ اول دو خانه از سه خانهٔ A اعداد ۱ و ۲ باشند که تعداد طرق جا دادن آن دو رقم در سه خانهٔ مورد اشاره $\binom{۳}{۲} \times ۲!$ ؛ یعنی ۶ می‌باشد. در مرحلهٔ دوم توجه داریم که در خانهٔ خالیِ A و دو خانهٔ سمت راست B باید دو عدد ۳ و ۴ موجود باشند که تعداد طرق جا دادن آن دو رقم در سه خانهٔ مورد اشاره نیز برابر ۶ می‌باشد. در مرحلهٔ سوم می‌فهمیم که در خانهٔ خالی باقی‌مانده از

مراحل قبلی و دو خانهٔ سمت راست C باید دو عدد ۵ و ۶ موجود باشند که تعداد طرق جا دادن آن دو رقم در سه خانهٔ مورد اشاره نیز برابر ۶ می‌باشد. در مرحلهٔ آخر سه خانهٔ خالی می‌ماند که باید سه عدد ۷، ۸ و ۹ را در آن سه خانه قرار دهیم که این عمل نیز به ۶ طریق ممکن است. بنابراین تعداد کل حالات برابر $۶^{۴}$ یعنی ۱۲۹۶ می‌باشد.

۲۴. ادعا می‌کنیم تجزیهٔ ۶ + ۳ + ۴ = ۱۳ حالت بهینه است.

در بین گزینه‌ها گزینهٔ بزرگتر از ادعای ما اعداد ۷۵ و ۸۰ می‌باشند که هر دو مضرب ۵ می‌باشند. اگر ۱۳ را به‌صورت ۵ + ۸ = ۱۳ تجزیه و سپس عدد ۸ را به‌صورت‌های دلخواه مانند ۲ + ۶ یا ۴ + ۳ + ۱ یا ۷ + ۱ تجزیه کنیم در همه حال حاصل‌ضرب به‌دست آمده از ۷۲ کمتر خواهد شد.

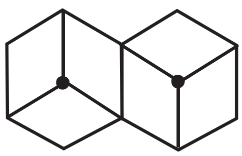
۲۵. بهترین حرکت ممکن به شکل مقابل می‌باشد که در این صورت حاصل‌ضرب مورد اشاره $۵^{۱} \times ۴^{۴} \times ۳^{۴} \times ۲^{۴}$ یعنی ۱۶۵۸۸۸۰ می‌باشد.



۲۶. تمام حالات در جدول مقابل مشخص است، که مجموع آنها برابر ۱۴ می‌باشد.

تعدادحالات	I	U	V	Y	X
۱	۳	–	–	–	۱
۱	–	۱	–	۱	–
۱	۴	–	–	۱	–
۱	۳	–	۲	–	–
۳	–	۲	۱	–	–
۲	۴	۱	۱	–	–
۱	۸	–	۱	–	–
۱	۱	۳	–	–	–
۱	۵	۲	–	–	–
۱	۹	۱	–	–	–
۱	۱۳	–	–	–	–

۲۷. با برداشتن هر چوب کبریت حداکثر دو مثلث از بین می‌روند، چون ۱۲ مثلث در شکل موجود است پس برداشتن حداقل ۶ چوب کبریت الزامی است. با برداشتن ۶ چوب کبریت مطابق شکل مقابل حذف همهٔ مثلث‌ها امکان‌پذیر است.



۲۸. مراحل کار به شکل زیر می‌باشد:

۷ , ۷ , ۷ , ۷ , ۷ , ۷ , ... , ۷ , ۷

پس از سه مرحله : ۱ , ۱۰ , ۷ , ۷ , ۷ , ۷ , ... , ۷ , ۷

پس از چهار مرحله : ۱ , ۲ , ۱۱ , ۷ , ۷ , ۷ , ... , ۷ , ۷

پس از پنج مرحله : ۱ , ۲ , ۱ , ۱۲ , ۷ , ۷ , ... , ۷ , ۷

پس از پنج مرحله : ۱ , ۲ , ۱ , ۲ , ۱۲ , ۷ , ... , ۷ , ۷

پس از پنج مرحله : ۱ , ۲ , ۱ , ۲ , ۲ , ۱۲ , ... , ۷ , ۷

پس از پایان تمام مراحل : ۱ , ۲ , ۱ , ۲ , ۲ , ۲ , ... , ۲ , ۲

تعداد کل مهره‌ها = ۲ × ۹۸ + ۱ + ۱ = ۱۹۸ ⇒

۲۹. پس از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ ساعت ارتفاع بلندترین برج ساخته شده به‌ترتیب برابر ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴ و ۱۲۸ بلوک می‌باشد.

در هشتمین ساعت می‌توان یک برج ۱۰۰ بلوکی را بر روی برج ۱۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۲۲۸ بلوکی ساخت. بنابراین پس از گذشت ۸ ساعت بلندترین برج می‌تواند ۲۲۸ بلوک داشته باشد.

در نهمین ساعت نیز می‌توان یک برج ۱۰۰ بلوکی را بر روی برج ۲۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۳۲۸ بلوکی ساخت. واضح است که اگر پس از گذشت ۷ ساعت برج ۱۲۸ بلوکی را بر روی برج ۱۲۸ بلوکی دیگر قرار دهیم دو ساعت طول خواهد کشید که در این صورت در انتهای ساعت نهم طول بلندترین برج ۲۵۶ بلوک می‌باشد که برج ساخته شده به شیوهٔ قبل که ۳۲۸ بلوک داشت بهینه می‌باشد.

برای ساختن برج بعدی به دو شیوه می‌توان عمل کرد یا در انتهای ساعت نهم یک برج ۱۰۰ بلوکی را در طول یک ساعت بر روی بلندترین برج ساخته شده یعنی برج ۳۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۴۲۸ بلوکی

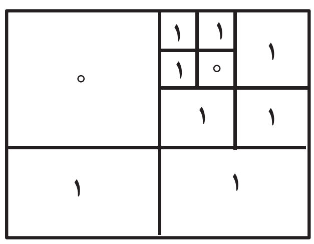
به‌دست آورد، یا در انتهای ساعت هشتم یک برج ۲۲۸ بلوکی را در طول دو ساعت بر روی بلندترین برج ساخته شده یعنی ۲۲۸ بلوکی دیگر قرار داده و برج ۴۵۶ بلوکی به‌دست آورد که حالت دوم بهینه است. بنابراین در انتهای ساعت دهم بلندترین برج ساخته شده دارای ۴۵۶ بلوک خواهد بود.

به همین ترتیب استدلال می‌شود که در انتهای ساعات ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ طول بلندترین برج می‌تواند به‌ترتیب ۶۵۶، ۹۱۲، ۱۳۱۲، ۱۸۲۴ و ۲۶۲۴ بلوک داشته باشد. بنابراین برای ساختن برجی به ارتفاع ۲۰۰۰ بلوک حداقل ۱۵ ساعت وقت لازم است.

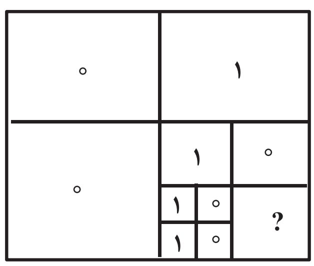
۳۰.

پس از مرحلهٔ اول:	bacbac...bac
پس از مرحلهٔ دوم:	abcabcabcabc
پس از مرحلهٔ سوم:	bacbac
پس از مرحلهٔ چهارم:	abc
پس از مرحلهٔ آخر:	bc

۳۱. ماتریس متناظر به رشتهٔ ۱ ماتریس مقابل می‌باشد.



بعد از ۲، چهار عدد یکسان نمی‌توانـد بـاشد، پس رشتهٔ ۲ ماتریس متناظر ندارد. ماتریس متناظر به رشتهٔ ۳ نیز تا قبل از مرحلهٔ آخر به شکل مقابل می‌باشد که در مرحلهٔ آخر ۱۰ را نمی‌توان در خانهٔ باقی مانده قرار داد:



۳۲. به‌ازای هر ماتریس یک و فقط یک رشته به‌دست می‌آید. بنابراین چون تعداد ماتریس‌ها برابر $2^{16\times16}$ یا 16^{64} می‌باشد تعداد رشته‌ها نیز همین تعداد خواهد بود.

۳۳. تعداد جلساتی که احسان، حسین و شادی در آن شرکت کرده‌اند را به‌ترتیب e، h و s می‌نامیم. با توجه به فرض معلوم می‌شود که هر یک از متغیرهای e، h و s یکی از دو عدد ۶ یا ۷ می‌توانند باشند. از طرف دیگر اگر تعداد کل جلسات تشکیل شده را k در نظر بگیریم، آنگاه چون هر جلسه متشکل از ۴ نفر می‌باشد بنابراین تساوی ۵ + ۸ + e + h + s = ۴k برقرار خواهد بود. با ساده کردن تساوی فوق و با در نظر گرفتن نابرابری ۱۸ ≤ e + h + s ≤ ۲۱ به تساوی e + h + s = ۱۹ خواهیم رسید که معلوم می‌شود یکی از آن دو متغیر برابر ۷ و دو تای دیگر برابر ۶ می‌باشند.

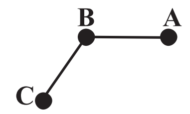
۳۴. در هر حرکت اسب از یک خانه به خانه‌ای غیر همرنگ آن می‌رود. معلوم است که دو خانهٔ متقابل موارد اشاره در جدول ۲۰۰۰ × ۲۰۰۰ هم‌رنگ می‌باشند (مثلاً سفید). اگر دو مهره همدیگر را در خانه‌ای هم‌رنگ با خانه‌های مبدأ ملاقات کنند آنگاه هر دو اسب به تعداد زوجی حرکت انجام داده‌اند که مجموع حرکاتشان زوج می‌شود. اگر دو مهره همدیگر را در خانه‌ای غیر هم‌رنگ با خانه‌های مبدأ ملاقات کنند، آنگاه هر دو اسب به تعداد فردی حرکت انجام داده‌اند که باز مجموع حرکاتشان زوج می‌شود. بنابراین عدد خواسته شده عددی زوج است. دو اسب مجموعاً ۱۰۰۰ خانه در جهت افقی و ۱۰۰۰ خانه در جهت عمودی و مجموعاً ۲۰۰۰ واحد جابه‌جا می‌شوند و با هر حرکت اسب سه واحد جابه‌جایی اتفاق می‌افتد. بنابراین برای رسیدن به هدف حداقل $\left\lceil \frac{۲۰۰۰}{۳} \right\rceil$ یعنی ۱۳۳۳ حرکت لازم است که کوچکترین عدد زوج بزرگتر از ۱۳۳۳ عدد ۱۳۳۴ می‌باشد.

۳۵. آن فرد در روزهای سه‌شنبه و پنج‌شنبه می‌تواند جملهٔ اشاره شده را بگوید.

۳۶. زوجیت هر خانه از جدول را مستقل از خانه‌های دیگر می‌توان عوض کرد. به‌عنوان مثال برای تغییر زوجیت خانهٔ a از جدول مقابل خانه‌های bac، acd و abd را به‌ترتیب انتخاب کرده و زوجیت خانه‌های هر دسته را تغییر می‌دهیم.

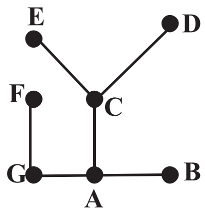
a	b
c	d

۳۷. برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهر مجاور دو لیتر بنزین هدر می‌رود (یک لیتر برای رفت و یک لیتر برای برگشت). برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهری که با شهر مبدأ دو واحد فاصله دارد



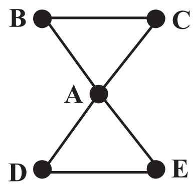
۸ لیتر بنزین هدر می‌رود، زیرا اگر شهر مبدأ در شکل مقابل شهر A و شهر مقصد شهر C باشد، فاصله بین شهر A و B سه بار و فاصلهٔ بین B تا C یک بار به‌صورت رفت و برگشت طی می‌شود تا از شهر A به شهر C یک لیتر بنزین منتقل شود.

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهری که با شهر مبدأ سه واحد فاصله دارد ۲۶ لیتر بنزین هدر می‌رود. با این توضیحات معلوم می‌شود که بهترین شهر برای مبدأ شهر A می‌باشد که در این صورت برای انتقال یک لیتر بنزین به شهرهای B، C، D، E، F و G به‌ترتیب ۲، ۲، ۸، ۸، ۸ و ۲ لیتر بنزین هدر می‌رود که با بنزین‌های موجود در مخازن که باید حداقل یک لیتر در هر مخزن باشد مجموعاً ۳۷ لیتر می‌شود که از ۳۰ لیتر بیشتر است.



۳۸. عمل اشاره شده فقط جایگشت‌های دوری جایگشتِ داده شده را تولید می‌کند که جایگشت خواسته شده جزء آنها نیست.

۳۹. در صورت سؤال تعریف نفر برنده مشخص نشده است.



۴۰. از دو جادهٔ AB و AC حداقل یکی (مانند AB) و از دو جادهٔ AE و AD نیز حداقل یکی (مانند AE) قبل از طرح توسعه موجود بوده‌اند. بنابراین باید بعد از طرح توسعه جاده‌ای مانند BE تأسیس می‌شد که نشده است.

۴۱. بعد از بازی نفر اول تعداد کشمش‌های برداشته شده فرد و بعد از بازی نفر دوم تعداد کل کشمش‌های برداشته شده زوج می‌شود. چون ۱۳۷۸ زوج است بنابراین بازی توسط نفر دوم به اتمام می‌رسد و نفر اول برنده می‌شود.

۴۲. دنبالهٔ داده شده عدد ۴ را ندارد ولی دنبالهٔ مطلوب عدد ۴ دارد.

۴۳. مراحل کار به شکل زیر می‌باشد:

۰۱۱۰۰۰۱۰۱ ⟶ ۱۰۱۰۰۰۱۰۱ ⟶ ۱۰۱۰۰۰۱۱۰

⟶ ۱۰۱۰۰۱۰۱۰ ⟶ ۱۰۱۰۱۰۰۱۰ ⟶ ۱۰۱۱۰۰۰۱۰

۴۴. مراحل کار به شکل زیر می‌باشد:

۳۲۱ $\xrightarrow{۱}$ ۳۲۰۱ $\xrightarrow{۲}$ ۳۲۰۰۱ $\xrightarrow{۳}$ ۳۲۰۰۰۱

$\xrightarrow{۴}$ ۳۲۰۰۰۰۱ $\xrightarrow{۵}$ ۳۰۱۱۰۰۱ $\xrightarrow{۶}$ ۳۰۱۰۱۰۱

$\xrightarrow{۷}$ ۳۰۱۰۰۱۱ $\xrightarrow{۸}$ ۳۰۰۱۰۱۱ $\xrightarrow{۹}$ ۳۰۰۰۱۱۱

$\xrightarrow{۱۰}$ ۰۱۱۱۱۱۱

۴۵. در پنج‌ضلعی زیر عدد روی قطر AD برابر ۵ و عدد موجود بر روی هر یک از سایر قطرها ۴ می‌باشد که مجموع کل آنها فرد می‌شود.