

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نهایی ترکیبیات

شنبه ۲۹ تیر ۱۳۹۲

وقت: ۳ ساعت

#### مسئله اول. بازی مرموز ..... ۱۵ امتیاز

تعدادی سنگریزه وجود دارد که دو نفر مشغول بازی با آنها هستند. ما از قوانین بازی آنها اطلاع دقیقی نداریم، ولی می‌دانیم مجموعه‌ی  $S = \{1, a_1, \dots, a_t\}$  وجود دارد که همه اعضای آن از عدد طبیعی  $k$  (از این عدد آگاه هستیم) کمتر هستند و هر بازیکن در نوبت خود یکی از اعضای  $S$  را انتخاب می‌کند و به تعداد آن سنگریزه برمی‌دارد. همچنین هر کسی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است.

ما می‌توانیم عددی مثل  $n$  را انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم که استراتژی برد به ازای  $n$  سنگریزه با چه کسی است. ثابت کنید با متناهی پرسش می‌توان استراتژی برد به ازای همه اعداد را یافت.

#### مسئله دوم. قضیه‌ی باقیمانده چینی ..... ۲۰ امتیاز

$n$  عدد اول  $p_1, p_2, \dots, p_n$  و همچنین  $n$  عدد صحیح  $d_1, d_2, \dots, d_n$  داده شده‌اند که به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  می‌دانیم  $0 \leq d_i < p_i$ . می‌خواهیم عددی را بیابیم که به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  باقیمانده‌ی آن بر  $p_i$  برابر با  $d_i$  باشد. ثابت کنید می‌توانیم عدد مورد نظر را در  $O(\log(p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n))$  بیابیم.

#### مسئله سوم. خط‌کشی ..... ۲۵ امتیاز

جدولی  $2^k \times 2^k$  داده شده است. به ازای هر  $1 \leq i \leq 2^k$  از نقطه‌ی  $(0, 0)$  (گوشه‌ی پایین سمت چپ) خطی به نقطه‌ی  $(i, 2^k)$  (روی ضلع بالایی جدول) می‌کشیم و سپس تعداد خانه‌هایی که این خط از آنها (نه روی آنها) عبور کرده است را روی تخته یادداشت می‌کنیم و در نهایت مجموع تمام  $2^k$  عدد را محاسبه می‌کنیم. عدد نهایی چند خواهد بود؟

#### مسئله چهارم. گراف بازی ..... ۳۰ امتیاز

گراف کاملی با  $2^0 14$  راس در اختیار داریم. دو راس  $u$  و  $v$  داده شده‌اند. دو نفر بازی زیر را روی این گراف انجام می‌دهند: هر نفر در نوبت خود یکی از یال‌های گراف باقیمانده را حذف می‌کند. در صورتی که پس از حرکت یک نفر، هیچ مسیری از راس  $u$  به راس  $v$  وجود نداشته باشد او بازنده خواهد شد. در صورتی که هر بازیکن به بهترین شکل بازی خود را انجام دهد، چه کسی استراتژی برد دارد؟ ادعای خود را بیان و اثبات کنید.