

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون تئوری اول

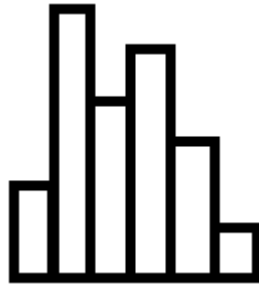
پنج شنبه ۱۶ تیر ۱۳۹۰

وقت: ۵ ساعت

بابایی، آبام، طهماسبی

مسئله‌ی اول. تخته‌ها ..... ۲۰ امتیاز

خیکوله به تازگی در یک روستا خانه‌ای خریده است و می‌خواهد جلوی آن را حصار بکشد. او در اطراف روستا  $n$  تخته چوب پیدا کرده است که تخته چوب  $i$ ام دارای عرض یک متر و طول  $i$  متر است. او می‌خواهد با کنار هم قرار دادن  $n$  تخته چوب، حصار را درست کند، به طوری که تمامی عرض‌های چوب‌ها که یک متر است روی زمین قرار داشته باشند. برای مثال شکل زیر یک روش چیدن تخته چوب‌ها را وقتی  $n = 6$  است، نشان می‌دهد. او می‌خواهد تخته



چوب‌ها را به ترتیبی بچیند که محیط کل حصار بیشینه شود. به ازای چه ترتیب‌هایی این اتفاق می‌افتد. (ادعای خود را باید ثابت کنید)

مسئله‌ی دوم. برج‌های مراقبت ..... ۳۵ امتیاز

مرز مناطق ارزشمند شهری با منحنی‌های بسته ساده روی نقشه نمایش داده شده است. مناطق ارزشمند، معجزا بوده و حتی نقطه مرزی مشترکی ندارند. شهردار شهر برای محافظت از این مناطق تصمیم می‌گیرد همه آنها را در داخل حصاری قرار دهد. به این منظور از نقشه‌کش‌ان خبره می‌خواهد ابتدا این حصار را که قطعا یک منحنی بسته ساده است، روی نقشه بکشد. به منظور محافظت از مناطق ارزشمند، شهردار از نقشه‌کش‌ان می‌خواهد نقاطی را بر روی حصار مشخص کنند تا در آن نقاط برج مراقبت نصب شود. برای آنکه مراقبت دقیق‌تر باشد شهردار تقاضا می‌کند در مکان‌هایی که برج قرار است نصب شود حصار با مرز مناطق ارزشمند تماس داشته باشد و در غیر این صورت لزومی به تماس حصار با مناطق ارزشمند نیست. از آنجا که اگر دو برج مراقبت بطور متوالی روی حصار در کنار یک منطقه ارزشمند ساخته شود، باعث اتلاف سرمایه است، شهردار چنین اجازه‌ای به نقشه‌کش‌ان نمی‌دهد اما در صورتی که دو برج مجاور یک منطقه ارزشمند، بر روی حصار متوالی نباشند شهردار دلیلی بر مخالفت نمی‌بیند. اگر  $n$  تعداد مناطق ارزشمند باشد نشان دهید تعداد برج‌های مراقبت حداکثر  $2n - 1$  خواهد بود.

مسئله سوم. گراف یابی ..... ۴۵ امتیاز

یک ماشین در اختیار داریم که با گرفتن عدد  $n$  گراف ساده ای می سازد که راس هایش مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  هستند. هدف ما این است که با پرسیدن چند سوال از ماشین گراف را پیدا کنیم. در هر پرسش می توانیم یک زیر مجموعه فرد عضوی از رئوس گراف را به ماشین بدهیم و از آن رئوس درجه فرد زیر گراف القایی حاصل از آن مجموعه را، دریافت کنیم.

• الف) ثابت کنید در صورتی که  $n \geq 2$ ، گراف اولیه هر چه که باشد ما نمی توانیم آن را به طور یکتا مشخص کنیم. (۳۰ امتیاز)

• ب) ثابت کنید اگر بدانیم که ماشین فقط گرافهای ناهمبند را تولید می کند، همواره می توان گراف اولیه را حدس زد. (۱۵ امتیاز)

«موفق باشید»