

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهمایی تئوری

وقت: ۵ ساعت

دو شنبه ۲۱ شهریور ۱۳۹۰

مسئله اول. تیل بازی ۲۰ امتیاز

خیکوله و خیکولا با هم بازی زیر را انجام می‌دهند:

- بازی آنها به صورت نوبتی روی یک درخت انجام می‌شود که تعدادی مهره روی رئوس آن قرار دارد. (ممکن است روی یک راس چند مهره باشد).
- تعداد مهره‌ها زوج است.
- هرکس در نوبت خودش دو مهره‌ی دلخواه را که فاصله‌شان حداقل دو یال می‌باشد انتخاب می‌کند و هر کدام را به اندازه‌ی یک یال به دیگری نزدیک می‌کند. یعنی فاصله دو مهره دقیقاً به اندازه‌ی دو یال کاهش می‌یابد.
- بازی وقتی تمام می‌شود که دیگر حرکتی با مهره‌ها قابل انجام نباشد. در این صورت حتماً همه‌ی مهره‌ها یا روی یک راس قرار دارند، یا روی دو راس مجاور. در حالت اول برنده‌ی بازی خیکوله است. در حالت دوم، در صورتی که روی هر یک از دو راس زوج تا مهره قرار داشته باشد، خیکوله برنده‌ی بازی است و در صورتی که روی هر دو راس فرد تا مهره قرار داشته باشد، خیکولا می‌برد. (توجه کنید که تعداد مهره‌ها زوج است).
- خیکوله اولین حرکت را انجام می‌دهد.

با فرض اینکه درخت دارای n راس و k مهره است، الگوریتمی از $O(n+k)$ ارائه دهید که با گرفتن اطلاعات درخت و مهره‌ها، برنده‌ی بازی را مشخص کند.

مسئله دوم. دور همیلتونی ۳۵ امتیاز

حمید در حال مطالعه روی گراف‌هایی است که می‌توانیم در آن‌ها دور همیلتونی را با زمان چند جمله‌ای پیدا کنیم. پس از بررسی‌های بسیار او به این نتیجه می‌رسد که اگر وجود تعدادی از زیرگراف‌های القایی ۴ راسی را در گراف مورد بررسی ممنوع کند، می‌تواند همیلتونی بودن گراف را با الگوریتمی سریع مشخص کند. او وجود ۳ دسته از گراف‌های ۴ راسی را در زیرگراف‌های القایی گراف مورد بررسی، ممنوع می‌کند:

- ستاره‌ی ۴ راسی
- مسیر ۴ راسی
- خوشه ۴ راسی

حال حمید می‌خواهد الگوریتمی از $O(e)$ ارائه کند که در گراف‌های همبند با این ویژگی‌ها، در صورت وجود یک دور همیلتونی پیدا کند و در صورتی که گراف همیلتونی نیست، این موضوع را اعلام کند. (e تعداد یال‌های گراف است.)

مسئله سوم. فکر بکر ۴۵ امتیاز

کرکس^۱ که از بازی‌های کامپیوتری خسته شده بود، به برادرش شی کرکس^۲ پیشنهاد داد که بازی‌ای شبیه فکر بکر انجام دهند. کرکس n مهره با n رنگ مختلف را روی زمین می‌ریزد. و به شی کرکس می‌گوید که من ترتیبی از این مهره‌ها در ذهن خود دارم. اگر بتوانی به من ترتیبی بدهی که در آن، حداقل یکی از رنگها سر جای خودش باشد تو برنده می‌شوی و اما اگر ترتیب تو شرایط لازم را نداشت، باید ترتیب جدیدی ارائه دهی.

شی کرکس می‌خواهد تمام تلاش خود را انجام دهد و در کمترین حدس، ترتیب مناسبی را بدست بیاورد تا هوشش را به رخ کرکس بکشد. شما به او کمک کنید و کمترین t را بیابید که شی کرکس بتواند در بدترین حالت با t حدس، برنده شود. ادعای خود را باید اثبات کنید.

^۱ Karaks

^۲ She Karaks