

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهمایی تئوری

وقت: ۵ ساعت

چهارشنبه ۱۶ شهریور ۱۳۹۰

مسئله اول. همبندی ۲۵ امتیاز

یک جدول $n \times n$ داریم که k خانه‌ی آن رنگ شده است. می‌خواهیم چند خانه‌ی دیگر را رنگ کنیم تا خانه‌های رنگ شده یک ناحیه‌ی همبند بسازند.

الف) ثابت کنید همیشه می‌توان این کار را انجام داد به طوری که در انتها تعداد خانه‌های رنگ شده، از $O(n \cdot \sqrt{k})$ باشد. (۱۰ نمره)

ب) ثابت کنید که به ازای هر k می‌توان طوری k خانه از یک جدول $n \times n$ را رنگ کرد که اگر بخواهیم با رنگ کردن چند خانه‌ی جدید، آن‌ها را همبند کنیم، در انتها از $\Omega(n \cdot \sqrt{k})$ خانه‌ی رنگ شده خواهیم داشت. (۱۵ نمره)

مسئله دوم. دور ثابت ۳۰ امتیاز

گرافی ساده داریم که دارای n راس است و همه دورهای آن به طول k هستند. حداکثر یال‌های این گراف بر حسب n و k چقدر است؟

مسئله سوم. خرید برنج ۴۵ امتیاز

... آقا میکائیل از شما می‌خواهد تا برای نهار فردا k کیلو برنج بخرید. شما از آقای شیری ماشین باشگاه را می‌گیرید و تصمیم می‌گیرید از مغازه‌های اطراف برنج را تهیه کنید. خوشبختانه نقشه‌ی مغازه‌های اطراف باشگاه به شکل یک گراف وزن دار n راسی در داشبورد ماشین قرار دارد که در آن هر راس معادل یک مغازه و هر یال معادل هزینه‌ای است که شما برای رفتن از یک مغازه به مغازه‌ی دیگر با ماشین باشگاه باید بپردازید (ازجمله پول بنزین). توجه کنید که در این نقشه خود باشگاه هم به شکل یک راس مشخص شده است. همچنین در پشت نقشه راهنمایی قرار دارد که قیمت فروش برنج در هر مغازه را نوشته است. از آنجا که بیشتر خریدن برنج باعث می‌شود که تخفیف بیشتری بگیرید، به ازای هر مغازه k عدد در راهنما نوشته شده است، که عدد i ام آن نشان دهنده‌ی هزینه خرید i کیلو برنج از آن مغازه می‌باشد و این k عدد لزوماً رابطه‌ی خطی ندارند. در حین خروج از باشگاه آقای شیری از شما می‌خواهد که با کمترین هزینه برنج را تهیه کنید و به باشگاه برگردید، در غیر این صورت از دوره‌ی تابستانی حذف می‌شوید ...

شما خوابتان را برای یکی از طراحان سوال دوره تابستانی تعریف می‌کنید.

حال الگوریتمی از $O(nk(n+k))$ ارائه دهید تا با گرفتن نقشه‌ی راهنما، کمترین هزینه برای خرید k کیلو برنج و بردن آنها به باشگاه را پیدا کند.