

مسئله‌ی اول. زیرمجموعه‌ها ..... ۲۵ امتیاز

فرض کنید  $n$  و  $k$  دو عدد طبیعی هستند و  $n \geq 2^{k-1}$ . در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, n\}$  مجموع اعضاء مضرب  $2^k$  است؟ مجموع اعضای مجموعه‌ی تهی را برابر صفر در نظر بگیرید.

مسئله‌ی دوم.  $K_{2,5}$  تک‌رنگ ..... ۲۵ امتیاز

یال‌های گراف  $K_{16}$  را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرده‌ایم به طوری که اختلاف تعداد یال‌های قرمز و آبی حداقل هشت تاست. ثابت کنید یا یک  $K_{2,5}$  قرمز وجود دارد یا یک  $K_{2,5}$  آبی. گراف  $K_{2,5}$  گراف دوبخشی کامل است با دو بخش دو رأسی و پنج رأسی که در آن، هر رأس بخش اول با تمام رئوس بخش دوم مجاور است.

مسئله‌ی سوم. اندازه‌ی خانواده ..... ۳۰ امتیاز

فرض کنید  $F = \{(X_i, Y_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$  خانواده‌ای از زوج زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $S$  باشد به طوری که

(یک) به ازای هر  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  داریم  $|X_i| = r$  و  $|Y_i| = s$ ،

(دو)  $X_i \cap Y_j = \emptyset$  اگر و تنها اگر  $i = j$ .

ثابت کنید

$$m \leq \frac{(r+s)!}{r!s!}.$$

مسئله‌ی چهارم. پوشش حداکثری ..... ۲۰ امتیاز

فرض کنید  $n$  و  $k$  دو عدد طبیعی هستند و  $2 \leq k \leq n$ .  $n$  نقطه در صفحه مفروض‌اند به طوری که بین هر  $k$  تایی از آنها دو نقطه با فاصله‌ی حداکثر یک وجود دارد. ثابت کنید دایره‌ای به شعاع یک وجود دارد که حداقل  $\lceil \frac{n}{k-1} \rceil$  تا از آنها داخل یا روی دایره می‌افتند.

