

باسمه تعالی  
دوره‌ی تابستانی نوزدهمین المپیاد ملی کامپیوتر  
آزمون تئوری سوم

وقت: ۴ ساعت

پنج‌شنبه ۱۷ مردادماه ۱۳۸۸

مسئله‌ی اول: دوره‌های گراف ..... ۳۰ نمره

میانگین تعداد دوره‌های یک گراف که راس‌های آن با شماره‌های ۱ تا  $n$  برچسب خورده‌اند چقدر است؟ لزومی ندارد جواب نهایی شما یک عدد باشد و می‌تواند شامل سری و عبارات ریاضی ساده باشد.

مسئله‌ی دوم: نانوائی ..... ۳۰ نمره

در کشور شانگالیا مردم برای هر کاری باید مالیات بپردازند. در این کشور یک نانوائی وجود دارد که وقتی شروع به پخت می‌کند از قبل افراد پشت درب آن صف کشیده‌اند و فقط به کسانی نان می‌دهد که قبل از شروع پخت در صف ایستاده باشند. امروز در ابتدای پخت  $n$  نفر در صف حضور دارند که نفر  $i$  ام  $a_i$  قرص نان می‌خواهد. نانوائی با شروع از زمان صفر، در پایان هر دقیقه یک نان تحویل می‌دهد. اگر نفر  $i$  ام در لحظه‌ی  $t$  همه‌ی نان‌های خود را بگیرد باید  $t \times a_i$  سیلار مالیات بپردازد (سیلار واحد پولی شانگالیاست). افراد می‌خواهند به گونه‌ای در صف بایستند که مجموع مالیات پرداختی توسط آن‌ها کمینه شود. الگوریتمی برای این کار ارائه کنید که با دریافت  $a_i$  ها، ترتیب بهینه و مجموع مالیاتی را که افراد می‌بایست بپردازند مشخص کند. الگوریتم شما باید از زمان اجرای  $O(n)$  باشد. درستی آن را اثبات نمایید.

مسئله‌ی سوم: جاده‌ها ..... ۴۰ نمره

در کشور مانگالیا  $n$  شهر با شماره‌های ۱ تا  $n$  وجود دارد که بین هر دو شهر متوالی (با شماره‌ی  $i$  و  $i + 1$ ) دقیقاً دو جاده وجود دارد. هر یک از این  $2n - 2$  جاده با یک رنگ خط‌کشی شده است. شنگول و منگول می‌خواهند از شهر ۱ به شهر  $n$  بروند، به این شرط که مجموعه‌ی رنگ‌هایی که هر یک از آن‌ها در جاده‌های مسیر خود می‌بیند اشتراک نداشته باشند. الگوریتمی از  $O(n)$  ارائه دهید که دو مسیر با شرایط گفته شده را بیابد، یا اعلام کند که این کار امکان‌پذیر نیست. درستی آن را اثبات نمایید.

«موفق باشید»