

باسمه تعالی  
هفدهمین دوره المپیاد کامپیوتر  
امتحان نظری اصلی دوم  
پنج‌شنبه ۲۸ تیرماه ۱۳۸۶

وقت: ۵ ساعت

زادی‌مقدم، نیک‌زاد، نصیری‌شرق

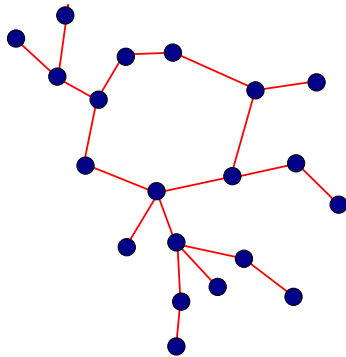
مسئله‌ی اول: شهرهای نزدیک ..... ۲۵ نمره

ثابت کنید می‌توان بین  $n$  شهر تعدادی جاده کشید به طوری که پس از احداث جاده‌ها، از هر شهری بتوان با استفاده از حداکثر سه جاده به هر شهر دیگری رسید و تعداد جاده‌های متصل به هر شهر  $O(n^3)$  باشد.

مسئله‌ی دوم: رنگ‌های چهارگانه ..... ۳۰ نمره

یک گراف «چهاررنگ‌پذیر رأسی» است اگر و فقط اگر بتوان به هر رأس آن، یکی از اعداد ۱، ۲، ۳ یا ۴ را نسبت داد به طوری که عدد دو سر هیچ یالی یک‌سان نباشد. ثابت کنید که می‌توان  $\lceil \frac{3n}{4} \rceil$  از یال‌های  $G$  را انتخاب کرد به طوری که زیرگراف حاصل از این  $\lceil \frac{3n}{4} \rceil$  تا یال، چهار رنگ‌پذیر رأسی باشد.

مسئله‌ی سوم: مگس روی خورشید داغ ..... ۴۵ نمره



$2k + 1$  درخت ریشه‌دار با عمق حداکثر  $k$  داریم. ریشه‌های این درخت‌ها را به هم وصل می‌کنیم؛ طوری که این ریشه‌ها تشکیل یک دور  $2k + 1$  رأسی بدهند. به چنین گرافی، «خورشید» می‌گوییم.

با یک تعریف دیگر، یک گراف «خورشید» از یک دور  $2k + 1$  رأسی ساخته می‌شود که هر رأس آن، ریشه‌ی یک درخت با عمق حداکثر  $k$  است. دقت کنید که یک درخت می‌تواند تنها شامل یک رأس باشد! یک خورشید برای  $k = 3$  در شکل نشان داده شده است.

در ابتدا، روی بعضی از رئوس این گراف که برگ نیستند، یک مگس قرار دارد! هر مگس در ابتدای هر ثانیه (به دلیل گرمای زیاد سطح خورشید!) رأس خود را ترک کرده و به یکی از رئوس مجاور آن می‌رود. اما در انتهای هر ثانیه، در هر رأس حداکثر یک مگس قرار دارد. به‌طور مثال، دو مگس مجاور می‌توانند در طی یک ثانیه، جایشان را باهم عوض کنند.

یک «وضعیت»، یک نحوه‌ی قرارگیری مگس‌ها روی رئوس گراف است به طوری که روی هر رأس غیربرگ، حداکثر یک مگس و روی برگ‌ها صفر مگس باشد. دو وضعیت  $A$  و  $B$  (با تعداد برابری مگس) به ما داده شده است. می‌خواهیم طوری مگس‌ها را برنامه‌ریزی کنیم که پس از مدت محدودی، از وضعیت  $A$  به وضعیت  $B$  برسند. می‌دانیم این کار (برای شرایط خواسته شده) امکان‌پذیر است. برای این کار روشی ارائه داده و آن را اثبات کنید؛ اگر

الف) [۲۵ نمره] بدانیم تعداد کل مگس‌ها حداکثر  $2k$  تا است.

ب) [۲۰ نمره] برای تعداد کل مگس‌ها شرطی وجود نداشته باشد، ولی بدانیم در هر یک از وضعیت‌های  $A$  و  $B$ ، تعداد مگس‌های روی دور فرد، حداکثر  $k$  تا است.

«موفق باشید!»