باسمه تعالی

شانزدهمین دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

امتحان پایانی درس گراف

چهارشنبه ۸ شهریور ۱۳۸۵

زادی‌مقدم، نوروزی، مهینی — وقت: ۵ ساعت

مسئله‌ی اوّل: افراز به $K_{۱,۳}$ ..... ۳۵ نمره

گراف مسطح G که همه‌ی نواحی آن (حتی ناحیه‌ی خارجی) به شکل مثلث[۱] می‌باشند را در نظر بگیرید. از این گراف ۳ یال ناحیه‌ی بیرونی را حذف کنید و گراف حاصله را H بنامید. ثابت کنید که یال‌های H را می‌توان به تعدادی $K_{۱,۳}$ افراز کرد به طوری که همه‌ی رئوس گراف به جز ۳ رأس ناحیه‌ی بیرونی G ، دقیقاً در یکی از $K_{۱,۳}$ ها نقش رأس مرکزی[۲] را داشته باشد. به این افراز، افراز متعادل می‌گوییم.

مسئله‌ی دوّم: تبدیل افراز ..... ۲۵ نمره

یک جهت‌دهی ستاره‌ای در سؤال قبل برای گراف H از روی یک افراز متعادل به این شکل به دست می‌آید که کافی‌ست یال‌های هر $K_{۱,۳}$ را طوری جهت‌دهی کنیم که از رأس مرکزی آن خارج شوند. حال دو جهت‌دهی $D_۱$ و $D_۲$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $D_۱$ و $D_۲$ با عمل چرخش به هم قابل تبدیل‌اند. عمل چرخش در یک گراف جهت‌دار به این صورت است که یک دور جهت‌دار در آن انتخاب می‌کنیم و جهت همه‌ی یال‌های آن دور را برعکس می‌کنیم.

مسئله‌ی سوّم: همریختی ..... ۱۵ نمره

گراف‌های $G(V, E_۱)$ و $H(V, E_۲)$ داده شده‌اند به طوری که

$V = \{۱, ۲, ..., ۸\}$

$E_۱ = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴), (۴, ۱), (۱, ۵), (۵, ۶), (۶, ۷), (۷, ۸), (۸, ۵), (۲, ۶)\}$

$E_۲ = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴), (۴, ۱), (۱, ۵), (۵, ۶), (۶, ۷), (۷, ۸), (۸, ۵), (۳, ۷)\}$

آیا G و H همریخت‌اند؟

گفته‌ی خود را ثابت کنید. اثبات‌های کوتاه‌تر نمره‌ی اضافی می‌گیرند.

مسئله‌ی چهارم: کره و دوایرش ..... ۲۵ نمره

یک کره با $n > ۲$ دایره‌ی عظیمه[۳] روی آن داده شده است؛ به طوری که همه‌ی این n دایره از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید نقطه‌ای روی کره هست که تقاطع دقیقاً دو دایره می‌باشد.

---

۱ دقیقاً مفهوم هندسی مثلث مد نظر است.

۲ رأس مرکزی یک $K_{۱,۳}$، رأس درجه‌ی ۳ ی آن است.

۳ دایره‌ی عظیمه دایره‌ای هم‌شعاع و هم‌مرکز کره است.