

باسمه تعالی

شانزدهمین دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

امتحان میان‌ترم درس گراف

شنبه ۱۴ مرداد ۱۳۸۵

وقت: ۲ ساعت و نیم

زادی‌مقدم، مهینی

مسئله‌ی اول: ماکسیمم تطابق ..... ۲۵ نمره

فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف  $X$  و  $Y$  است. ثابت کنید که ماکسیمم اندازه یک تطابق در  $G$  برابر است با:

$$|X| - \max_{S \subseteq X} \{|S| - |N(S)|\}$$

مسئله‌ی دوم: گراف پراز دور ..... ۲۵ نمره

فرض کنید گراف  $G$  یک گراف جهت دار قویاً همبند با  $n$  رأس است. ثابت کنید هر رأس در این گراف در یک دور جهت دار به طول ۳، یک دور جهت دار به طول ۴ و ... و یک دور جهت دار به طول  $n$  قرار دارد.

مسئله‌ی سوم: گراف آزاد ..... ۲۵ نمره

گراف  $G$  با  $n$  رأس را در نظر بگیرید. فرض کنید که این گراف همبند است و همچنین  $K_{1,4}$ —آزاد می‌باشد<sup>۱</sup>. ثابت کنید این گراف یک تطابق به اندازه حداقل  $\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$  دارد.

مسئله‌ی چهارم: درخت‌های فراگیر ..... ۲۵ نمره

ثابت کنید تعداد درخت‌های فراگیر  $K_{n,n}$  برابر  $n^{2n-2}$  عدد می‌باشد.

<sup>۱</sup> هیچ زیرگراف القایی دو بخشی کامل با یک رأس در یک بخش و چهار رأس در بخش دیگر ندارد.