

شما دانش پژوه و Δ شما در این آزمون برابر با ۲۶۰۰۳ است!

مسئله ی یک: فرار ببعی **۳۳ نمره**

ببعی در گوشه ی بالا و سمت چپ یک ماز ایستاده است. او در هر مرحله می تواند به یکی از خانه های مجاور ضلعی اش برود، در صورتی که دیواری بین این دو خانه نباشد. او می خواهد به خانه ای که گاوی در آن قرار دارد و در نقشه مشخص شده است برسد. ببعی برای رسیدن به گاوی باید مسیر یکتایی را طی کند. این مسیر را می توان با دنباله ای از ارقام نشان داد. به این ترتیب که هر حرکت به جهت های راست، بالا، چپ و پایین را به ترتیب با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان می دهیم. اگر این ارقام را از چپ به راست بنویسیم یک عدد بزرگ به دست می آوریم. ببعی برای رسیدن به گاوی نیاز به باقیمانده ی این عدد بر Δ دارد. شما باید این باقیمانده را برای هر بخش از سوال حساب کنید.
(شکل های مربوط به بخش های الف، ب و ج در پایان سوال ها آمده است)

- الف (۱۱ نمره): پاسخ شما:
- ب (۱۱ نمره): پاسخ شما:
- ج (۱۱ نمره): پاسخ شما:

مسئله ی دو: ببعی فولاد زره! **۳۳ نمره**

ببعی دنباله ی اعداد ۰ تا $2^n - 1$ را به ترتیب بر روی تخته یادداشت کرده است. گاوی بعد از دیدن تخته، همه ی اعداد را پاک کرده و به جای هر عدد، تعداد بیت های ۱ آن عدد در مبنای دو را یادداشت کرد. به عنوان مثال اگر n برابر با ۳ باشد، آن گاه دنباله ی اولیه برابر با ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و دنباله ی جدید برابر با ۰، ۱، ۲، ۱، ۲، ۱، ۱، ۰ خواهد بود. سپس ببعی با دیدن دنباله ی جدید، تصمیم گرفت تعداد نابیجایی های دنباله را بشمارد. فرض کنید عدد i -ام دنباله را a_i بنامیم. در این صورت به زوج مرتب (i, j) یک نابیجایی گفته می شود، اگر و تنها اگر $i < j$ و $a_i > a_j$ باشد. به عنوان مثال تعداد نابیجایی ها در مثال بالا برابر با ۱ است.

- ۲-الف (۱۱ نمره): اگر n برابر با ۷ و M برابر با تعداد نابیجایی های دنباله باشد، باقیمانده ی تقسیم M^n بر Δ چقدر است؟
..... پاسخ شما:
- ۲-ب (۱۱ نمره): اگر n برابر با ۱۴ و M برابر با تعداد نابیجایی های دنباله باشد، باقیمانده ی تقسیم M^n بر Δ چقدر است؟
..... پاسخ شما:
- ۲-ج (۱۱ نمره): اگر n برابر با ۲۰۱۴ و M برابر با تعداد نابیجایی های دنباله باشد، باقیمانده ی تقسیم M^n بر Δ چقدر است؟
..... پاسخ شما:

مسئله‌ی سه: بیعی و دزدی از مزرعه‌ی کاهو! ۳۴ نمره

بیعی چندی پیش به خاطر دزدی از مزرعه‌ی کاهو، دست‌گیر شد. او تنها یک راه برای آزادی دارد و باید بتواند چالش بزرگ چارپایان را حل کند. چالش بزرگ چارپایان یک معمای مرموز قدیمی است. قبل از گفتن معما، لازم است تعاریفی را بدانید. فرض کنید یک جایگشت داریم. منظور از a_i ، خانه‌ی i -ام جایگشت است. هم‌چنین فرض کنید جایگشت a_1, a_2, \dots, a_m را داریم و می‌خواهیم روی تعدادی از خانه‌های آن مانند $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}$ عمل **دوران** را انجام دهیم. در این عمل دوران، عدد خانه‌ی اول یا a_{j_1} به خانه‌ی دوم یا a_{j_2} می‌رود؛ عدد خانه‌ی دوم یا a_{j_2} به خانه‌ی سوم یا a_{j_3} می‌رود و ... و عدد خانه‌ی $m-k$ یا $a_{j_{m-k}}$ به خانه‌ی اول یا a_{j_1} می‌رود. برای مثال فرض کنید جایگشت $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ را داریم و می‌خواهیم روی خانه‌های دوم، سوم و پنجم جایگشت، عمل دوران انجام دهیم. پس از عمل دوران، جایگشت ما به $۱, ۵, ۲, ۴, ۳, ۶$ تبدیل خواهد شد. حال به معما برمی‌گردیم. جایگشت مرتب‌شده‌ی اعداد $۱, ۲, \dots, n!$ را در نظر بگیرید. سپس برای هر i که $۱ \leq i \leq n$ ، عدد $i!$ را در نظر بگیرید و کار زیر را انجام دهید:

خانه‌های جایگشت را به دسته‌های زیر افراز کنید:

- دسته‌ی نخست: $a_1, a_{i!+1}, a_{2 \times i!+1}, \dots, a_{n!-i!+1}$
- دسته‌ی دوم: $a_2, a_{i!+2}, a_{2 \times i!+2}, \dots, a_{n!-i!+2}$
- ...
- دسته‌ی آخر: $a_i!, a_{2 \times i!}, a_{3 \times i!}, \dots, a_{n!}$

حال روی خانه‌های هر دسته، عمل دوران را انجام دهید. به عنوان مثال فرض کنید $n = ۳$ باشد. در ابتدا $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ را داریم. پس از مرحله‌ی نخست، جای‌گشت به $۶, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ تبدیل خواهد شد. پس از مرحله‌ی دوم، به جای‌گشت $۴, ۵, ۶, ۱, ۲, ۳$ خواهیم رسید و در مرحله‌ی آخر، جای‌گشت $۴, ۵, ۶, ۱, ۲, ۳$ را خواهیم داشت.

جایگشتی که در انتها به دست می‌آید را در نظر بگیرید. این جایگشت را به صورت عددی $n!$ رقمی در مبنای $n! + ۳$ در نظر بگیرید. برای نجات بیعی، شما باید این عدد را در پیمانه‌ی Δ به دست بیاورید. برای مثال عدد متناظر جایگشتی که در مثال قبل به دست آوردیم، ۴۵۶۱۲۳ در مبنای ۹ می‌باشد.

- ۳-الف (۱۱ نمره): معما را برای $n = ۴$ حل کنید. پاسخ شما:
- ۳-ب (۱۱ نمره): معما را برای $n = ۱۰$ حل کنید. پاسخ شما:
- ۳-ج (۱۲ نمره): معما را برای $n = ۱۷$ حل کنید. پاسخ شما: