شما **حنا دختری در مزرعه** و Δ شما در این **آزمون اصلی شنبه** برابر با **۲۲۹۹۳۹** است!

مسئله اول: فوتبال! .... ۳۰ نمره

آیا می دونید تیم فوتبال ایران چطور تونست کره جنوبی رو در زمین این کشور شکست بده و به جام جهانی صعود کنه؟ کارلوس کی‌روش (سرمربی تیم) شب قبل از مسابقه، به وسیله دو تابع f و g شیوه بازی کره جنوبی رو آنالیز کرده بود!!! این توابع به صورت زیر تعریف می شوند:

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & y=0 \\ 2f(x,\lfloor \frac{y}{2} \rfloor), & y>0, y=2k \\ 3f(x,\lfloor \frac{y}{2} \rfloor), & y>0, y=2k+1 \end{cases}$$

$$g(n)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(i,j)$$

الف) اگر مقدار $g(\Delta+3)$ را M_1 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_1 بر Δ چند است؟ (۷ نمره) پاسخ شما: ....

ب) اگر مقدار $g(\Delta^2+3)$ را M_2 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_2 بر Δ چند است؟ (۱۰ نمره) پاسخ شما: ....

پ) اگر مقدار $g(2^{10000})$ را M_3 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_3 بر Δ چند است؟(۱۳ نمره) پاسخ شما: ....

مسئله دوم: والیبال! .... ۳۰ نمره

فرض کنید یک جدول با تعدادی عدد پر شده باشد. جمع اعداد سطر iاُم آن را a_i و جمع اعداد ستون iاُم آن را b_i می نامیم. دنباله کلیدی یک جدول $m \times n$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$[a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n]$$

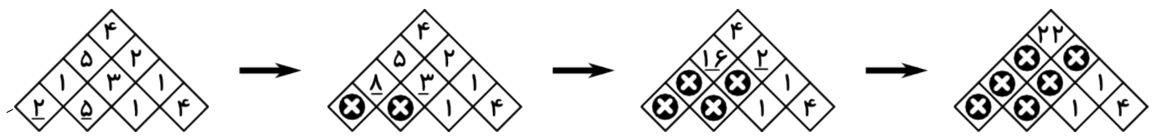
الف) بعد از بازی خوب ایران مقابل صربستان علی کوچولو تمامی حالات پر کردن یک جدول 4×4 با ۰ و ۱ را به همراه دنباله کلیدی هر کدام روی کاغذ نوشته است. اگر تعداد دنباله های متمایز تولید شده برابر M_1 باشد باقیمانده‌ی M_1^4 (عدد M_1 به توان ۴) بر Δ چند است؟ (۷ نمره)
پاسخ شما: ....

ب) سپس علی تصمیم گرفت یک جدول7×7 را با ۰ و ۱ پر کند حال او می خواهد بداند در چند جدول تمامی اعداد دنباله کلیدی برابر ۳ هستند. اگر این مقدار برابر M_2 باشد، باقیمانده‌ی عدد M_2 بر Δ چند است؟ (۱۰ نمره)
پاسخ شما: ....

پ) فرض کنید تمامی حالات پر کردن جدول 5×5 با ۰ و ۱ و ۲ که حداقل یک عدد ۲ در جدول آمده باشد را بنویسیم و دنباله ی کلیدی هر کدام از آنها را نیز محاسبه کنیم. اگر تعداد دنباله های متمایز تولید شده برابرM_3 باشد، باقیمانده‌ی عدد M_3 بر Δ چقدر است؟ (۱۳ نمره)
پاسخ شما: ....

مسئله سوم:چرخونک! .... ۴۰ نمره

علی کوچولو به تازگی یاد گرفته است خانه های زیر قطر اصلی یک جدول $n \times n$ را حذف کند و آن را ۴۵ درجه ساعتگرد بچرخاند. او به این شکل چرخونک تدبیر میگوید. ابتدا او در هر خانه ی چرخونک یک عدد می نویسد. سپس او در هر مرحله دو خانه که یک راس مشترک دارند و در یک ردیف افقی هستند را انتخاب میکند و مجموع آنها را به خانه ی بالایشان اضافه می کند. سپس روی آن دو خانه یک ضربدر میکشد تا دیگر نتواند از آنها استفاده کند و مقدارشان را تغییر دهد، حال علی می خواهد بداند در نهایت بیشترین مقداری که خانه ی بالایی چرخونک تدبیر می تواند داشته باشد چیست؟ برای مثال به شکل زیر که یک چرخونک تدبیر ۴ × ۴ می باشد، توجه کنید.

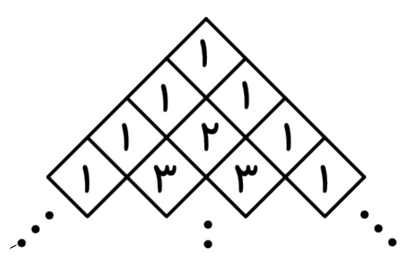


الف) علی کوچولو چرخونک تدبیر یک جدول ۷ × ۷ را کشیده است و به سطر اول آن از پایین به ترتیب از سمت چپ نام های ۱ تا ۷ ، به سطر دوم به ترتیب از سمت چپ نام های ۸ تا ۱۳ ، . . . و به خانه‌ی بالایی آن نام ۲۸ را داده است. مقدار خانه iاُم را با $q(i)$ نشان می دهیم و این مقدار از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$q(۱) = \Delta \ \% \ ۱۰$$
$$q(n) = (q(\lfloor n/۲ \rfloor) + q(n-۱) + ۱) \ \% \ ۱۰۰$$

که علامت ٪ نشان دهنده باقی مانده می باشد.به علی بگویید بیشترین مقداری که می تواند در نهایت به خانه ی بالا برساند چند است؟ اگر پاسخ این سوال برابر با $M_۱$ باشد، شما باید باقی مانده $M_۱$ بر Δ را به عنوان پاسخ اعلام کنید. (۸ نمره)
پاسخ شما: ....

ب) فرض کنید چرخونک تدبیر یک جدول ۵۰۰۰ × ۵۰۰۰ باشد و مقدار خانه های آن مانند مثلث خیام-پاسکال پر شده باشد (در مثلث خیام-پاسکال اگر یک خانه همسایه ی بالا چپ و بالا راست داشته باشد مقدارش برابر با جمع آنهاست و در غیر این صورت مقدارش برابر با یک می‌باشد.) فرض کنید بیشترین مقداری که می‌تواند به خانه‌ی بالا برساند برابر $M_۲$ باشد ، باقیمانده ی $M_۲$ بر Δ را حساب کنید.؟ (۱۲ نمره)
پاسخ شما: ....



پ) چرخونک تدبیر یک جدول ۵۰۰۰ × ۵۰۰۰ که خانه های آن مانند قسمت الف شماره گذاری شده اند، یعنی خانه های ردیف پایین از ۱ تا ۵۰۰۰، . . . و خانه ی بالایی $\binom{۵۰۰۱}{۲}$ نام گذاری شده است را در نظر بگیرید که مقدار خانه ای با نام i برابر $q(i)$ است . فرض کنید بیشترین مقداری که می توان به خانه ی بالا رساند برابر $M_۳$ باشد باقیمانده‌ی $M_۳$ بر Δ را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)
پاسخ شما: ....