

باسمه تعالی

المپیاد ملی کامپیوتر ایران

آزمون‌های انتخابی برای دوره‌ی تابستانی بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

آزمون اصلی یکم - اولین روز فصل تابستان سال ۱۳۹۰

نام و نام خانوادگی: آدرس ای‌میل: مدّت: ۱۸۰ دقیقه

شما دانش آموز شماره‌ی ۵۳ هستید. کد Δ ی شما برابر ۲۹۱۲۳ است.

آیدین دیشب خواب عجیبی دید. در خواب، او جلوی یک در چوبی قدیمی بزرگ و پر از نقش و نگارهای عجیب و غریب ایستاده بود. بالای در تابلوی فلزی زنگ‌زده‌ای آویخته شده بود که روی آن نوشته شده بود:

«آیدین جان، به شهر ارواح خوش آمدی. منتظرت بودیم!»

مسئله‌ی اول: رمز ورود به شهر ارواح ۱۳ نمره

آیدین هر چه تلاش کرد، نتوانست با هل دادن در آن را باز کند. از همین رو، به دنبال راهی برای باز کردن در گشت و متوجه شد کنار در یک صفحه‌ی دیجیتال رقمی (شبه صفحه کلید موبایل فقط با کلیدهای ۰ تا ۹) وجود دارد. آیدین حدس زد که برای باز شدن در باید رمز مناسبی را وارد کند. او چند عدد تصادفی را وارد کرد ولی فهمید که احتمالاً رمز بسیار پیچیده است و حدس زدن کاری را از پیش نمی‌برد.

آیدین سعی کرد پشت صفحه کلید را ببیند و فهمید از پشت این صفحه یک سیم به یک جعبه‌ی سیاه می‌رود. همچنین از جعبه‌ی سیاه هم یک سیم به قفل در وصل شده است. آیدین دقیق‌تر به قفل نگاه کرد و دید روی قفل عدد Δ^2 (دلته‌توان دو) نوشته شده است. او حدس زد که باید عددی را از طریق صفحه کلید وارد کند که پس از ورود به جعبه‌ی سیاه و پردازش شدن در آن، مقدار Δ^2 را تولید کرده و به قفل بفرستد. اما در جعبه‌ی سیاه چه خبر بود؟ آیدین که از فرط کنجکاوی بی‌تاب شده بود، با مشت به جعبه‌ی سیاه ضربه زد و دید در جعبه‌ی سیاه یک تکه کد به زبان ++C وجود دارد! این کد در فایل `blackbox.cpp` آورده شده است.

اکنون شما (آیدین) باید عدد α ای را بیابید که پس از کامپایل و اجرا کردن کد جعبه‌ی سیاه، اگر α را به عنوان ورودی به این کد بدهیم، خروجی آن برابر با Δ^2 (یعنی مقدار 29123×29123) شود. این عدد α چند است؟

جواب:

مسئله‌ی دوم: عدد جادویی! ۱۵ نمره

پس از آن که آیدین عدد α ی درست را یافت، در باز شد و او به دنیای پشت در قدم گذاشت. به محض عبور از در، ناگهان زیر پای آیدین خالی شد و به پایین سقوط کرد! سقوط آیدین آن قدر طولانی شد که او فکر کرد در یک سیاه‌چاله با عمق بی‌نهایت افتاده است...

آیدین در این فکر بود که ناگهانی صدایی ترسناک در فضا طنین انداخته و پرسید «آهای آیدین! عدد جادویی بلا را بگو تا تو را از سقوط نجات بدهیم!». آیدین که نمی‌دانست منشأ صدا از کجاست، لحظه‌ای هنگ کرد و بعد فریاد زد «عدد جادویی بلا دیگه چیه، بابا؟!». صدا پاسخ داد «در دنیای ما، که تو به آن قدم گذاشته‌ای، ۲۰۱۱ روح وجود دارند. هر کدام از این ارواح یک کد روحی منحصر بفرد (به اختصار ک.ر.م یا کرم) دارند که یک عدد صحیح و مثبت است. یک عدد جادویی عددی است که تمام کرم‌های این ۲۰۱۱ روح، مقسوم‌علیه‌ای از آن عدد باشند. عدد جادویی بلا، کوچکترین عدد جادویی ممکن است». آیدین فکری کردی و گفت «خب برادر من، این عدد که خیلی گنده‌ست!». صدا فکری کرد و گفت «باشه، گناه داری. حداقل بگو باقی‌مانده‌ی این عدد جادویی بلا (به اختصار ع.ج.ب. یا عجب!) بر Δ چند است؟»

آیدین بیچاره روی هوا سعی داشت محاسباتی انجام بدهد، اما چون فشار سقوط آزاد روی جریان گلوله‌های قرمز خونس تأثیر گذاشته بود، نمی‌توانست خوب تمرکز کند. برای همین از شما کمک می‌خواهد تا پاسخ مورد نظر به صدای ترسناک را به وی بدهید. باقی‌مانده‌ی «عجب» بر Δ چند است؟

جواب:

مسئله‌ی سوم: شجره‌نامه ۲۲ نمره
 پس از آن که آیدین عجب را گفت، روح خبیس احساس کرد که سؤالش زیادی آسان بوده! برای همین سؤال بعدی را مطرح کرد. روح خبیس گفت:

گوش کن آیدین جان، دوست من یعنی روح پلید، در خاندانشان یک شجره‌نامه دارد که تنها افراد مذکر در آن درج شده‌اند. از آن جا هم که هر روح حداکثر دو فرزند دارد، این شجره‌نامه شکل یک درخت دودویی را گرفته است. روح ادامه داد «به بیان دقیق‌تر در آن خاندان Δ تا روح با شماره‌های ۱ تا Δ وجود دارد. روح شماره یک ریشه درخت است و پدری ندارد، اما به ازای هر روح با شماره $2 \leq k \leq \Delta$ ، پدر رأس (روح) شماره k ، دقیقاً روح $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ است.

به ازای هر دو رأس X و Y در این شجره‌نامه، فاصله‌ی فامیلی بین این دو (که آن را با $D(X, Y)$ نشان می‌دهیم) برابر با کمترین تعداد یال لازم در کوتاهترین مسیر بین X و Y است.

روح اعظم اعتقاد داشته که روح‌هایی که شماره‌شان عددی اول است، از جادوانگی بالایی برخوردارند و «روح جاویدان» هستند.

دوست من می‌خواهد حاصل ضرب تمام $D(V_1, V_2)$ هایی را در این شجره‌نامه پیدا کند که:

- اولاً $V_1 < V_2$ باشد.
- ثانیاً V_1 و V_2 هر دو جاویدان (اول) باشند.
- ثالثاً $1 + V_1 + V_2$ نیز جاویدان (اول) باشد.^۱

اگر حاصل ضرب تمام $D(V_1, V_2)$ های دارای ۳ شرط فوق را M بنامیم. ای آیدین عزیز، باقی‌مانده‌ی این M بر Δ چندست؟

جواب:

مسئله‌ی چهارم: راهپیمایی در صحرای ارواح ۲۵ نمره

روح خبیس که از حاضر جوابی آیدین خسته شده بود، او را به صحرای بزرگ ارواح برد و در آنجا رهایش کرد. آیدین که هنوز گیج بود، خودش را در صحرای مه‌آلود یافت که کف آن به‌جای شن، گل و لای بود. تنها نکته مهم این بود که دقیقاً جلوی جایی که او افتاده بود، یک تابلوی راهنما قرار داده شده بود که بالای آن نوشته شده بود: «فاصله تا خروج از صحرا: ۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰ گام!». زیر تابلو اما، جزئیات بیشتری به شرح زیر نوشته شده بود:

- آیدین به این راهنما اعتماد کن! (چاره‌ی دیگری هم نداری البته! :D)
- تو الان در مختصات صفر و صفر (مرکز صحرا) هستی. این صحرا نامحدود هست. الان هم که این تابلو را داری می‌خوانی رویت به سمت شمال (y بیشتر) است.
- تو باید در هر گام ابتدا به سمتی که رویت هست یک گام برداری و بعد از پیمودن آن یک گام، دقیقاً ۹۰ درجه به سمت راست خودت بچرخ.
- تو هرگز نباید به خانه‌ی تکراری بروی! اگر دیدی با برداشتن گام به خانه‌ای می‌روی که قبلاً در آن بوده‌ای (جای پایت روی گل و لای مانده) باید به‌جای پیمودن گام، این بار ۱۸۰ درجه رویت را بچرخانی (تو گویی اصلاً از اول چرخش به جای به سمت راست، سمت چپ بوده) و بعد گام را بپیمایی. می‌توانی مطمئن باشی که با این چرخش ۱۸۰ درجه حتماً جلویت یک خانه‌ی غیرتکراری خواهد بود و گام را می‌توانی برداری.
- ۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰ (دو میلیارد) گام بپیم. ما آن‌جا منتظرت هستیم!

آیدین می‌دانست صدها سال طول می‌کشد تا دو میلیارد گام را بپیماید. اما دوست داشت بداند در پایان این گام‌ها در کجا خواهد بود که مستقیماً به آن مکان برود. اگر مکان پایانی را با مختصات (F_x, F_y) نشان دهیم، مقدار $|F_x \times F_y|$ (قدر مطلق حاصل ضرب دو مختصه‌ی نقطه‌ی نهایی) را D می‌نامیم. باقی‌مانده‌ی تقسیم D بر Δ چند است؟^۲

جواب:

^۱ اشکالی ندارد اگر این حاصل جمع از Δ بیشتر شود. مهم اول بودن آن است.
^۲ صرفاً برای رفع ابهام: در پایان گام‌های اول تا ششم، آیدین به ترتیب در خانه‌های $(0, 1)$ ، $(1, 1)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ ، $(2, -1)$ و $(1, -1)$ خواهد بود. ادامه مسیر را خودتان بیابید!

مسئله پنجم: پلی بامبویی بر روی رودخانه ۲۵ نمره
 به محض این که آیدین به خانهی مقصد در صحرا رسید، ارواح سرگردان او را احاطه کردند و به کنار یک رودخانه
 بردند! اکنون برای فرار از دست ارواح آیدین مجبور است از رودخانه عبور کنند، اما افسوس که علاوه بر موج‌های
 خروشان، رودخانه پر است از تمساح‌های آدم‌خوار.

با کمی جستجو آیدین تعدادی چوب بامبوی استوانه‌ای شکل کنار رودخانه یافته‌است که می‌تواند با متصل کردن
 آن‌ها در امتداد یکدیگر یک میله‌ی چوب بلند ساخته و با قرار دادن چوب در وسط رودخانه و یک جهش بلند، از
 روی آن بپرد! نکته‌ی جالب در مورد چوب‌های بامبوی یافته شده این است که روی هر کدام از این چوب‌ها یکی از
 اعداد اول بزرگتر از ۷ و کوچکتر از Δ نوشته شده و طول چوب x (چوبی که روی آن x نوشته شده) برابر با تعداد
 ارقام عدد x در مبنای ۱۰ است. دقت کنید که به ازای هر کدام از اعداد اول بزرگتر از ۷ و کوچکتر از Δ دقیقاً یک
 چوب از آن عدد وجود دارد.

برای این که شانس پریدن آیدین از رودخانه بیشتر شود، او دوست دارد میله‌ی چوبی نهایی‌ش تا حد امکان درازتر
 باشد. اما مسئله این‌جاست که برای اتصال چوب‌های بامبو به یکدیگر باید قوانین زیر رعایت شوند:

- (۱) از آن‌جا که هیچ وسیله‌ی چسبانندی در دسترس نیست، آیدین باید چوب‌ها(ی استوانه‌ای) را در هم فرو بکند.
- (۲) می‌دانیم چوب a در چوب b فرو می‌رود اگر مقدار عددی b بزرگتر از مقدار a باشد.
- (۳) می‌دانیم چوب a در چوب b فرو می‌رود اگر رقم یکان a برابر با رقم سمت چپ b باشد.
- (۴) در صورتی که چوب a با دارا بودن شرایط فوق در چوب b فرو برود، رقم سمت راست (یکان) b که تکراری
 است دیگر در طول محاسبه نمی‌شود. به عبارت دیگر افزودن یک چوب با k رقم در انتهای یک رشته چوب
 (در صورت رعایت شروط فوق) تنها باعث می‌شود که طول نهایی $k - 1$ رقم ارزش یابد.

برای مثال با استفاده از چوب‌های ۱۳، ۳۱ و ۱۰۱ می‌توان رشته‌ی ۱ ۰ ۱ ۳ ۱ به طول ۵ را ساخت.
 اگر M برابر با طول طولانی‌ترین میله‌ی ساخته شده با استفاده از بهترین زیرمجموعه از چوب‌های داده شده باشد،
 باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M^3 بر Δ چند است؟

جواب:

این داستان ادامه دارد ...!

«سرشار بمانید!»