

باسمه تعالی
المپیاد ملی کامپیوتر ایران

آزمون‌های انتخابی برای دوره‌ی تابستانی بیستین دورهی المپیاد کامپیوتر

آزمون اصلی اول - اولین روز تابستان ۱۳۸۹

نام و نام خانوادگی: مدّت: ۱۵۰ دقیقه

شما دانش‌آموز شماره‌ی ۱ هستید. کد Δ ی شما برابر ۲۰۰۱۱ است.

مسئله‌ی اول: سربازها! ۱۲ نمره
۱۳۸۹ سرباز در یک سطر ایستاده‌اند به طوری که سربازهایی که اندیس‌شان، از سمت چپ، یک عدد اول است رو به راست (R) و سایر سربازها رو به چپ (L) هستند. یعنی صف ما چنین است: $LRRLRLRLLL...LL$.
هر بار که سوت زده می‌شود، هر دو سربازی که «چشم تو چشم» هم باشند، جای‌شان را با هم عوض می‌کنند (فقط یک مرحله در هر سوت). به عنوان مثال اگر جایی به صورت $RRLRLR...R$ باشیم، پس از یک سوت ترتیب همین تکه از دنباله به صورت $RLRLRLR...R$ خواهد بود. (برخی سربازهای جابه‌جا شده متناظر، مشخص شده‌اند).

فرض کنید پس از زدن S بار سوت، به ترتیبی رسیده‌ایم که می‌توان فهمید دیگر سوت زدن فایده‌ای ندارد! در این صورت، مقدار باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $R = (S + S^2 + S^3)$ بر Δ چند است؟
جواب:

مسئله‌ی دوم: شماره تلفن ژند ۱۵ نمره
یک شماره تلفن ۷ رقمی را ژند می‌گوییم اگر بتوان ارقام آن به صورت $a\ bbb\ ccc$ یا $a\ bbb\ ccc$ یا $aa\ bbb\ cc$ یا $aaa\ bb\ cc$ یا $a\ b\ a\ b\ a\ b\ a$ نوشت که a ، b و c ، ارقام یک‌رقمی نه‌لزوماً متمایز هستند.
برای مثال شماره‌های ۹۹۲۲۶۶۶ و ۳۳۳۰۳۳۳ و ۴۴۴۴۴۴۴ همگی ژند هستند. ولی شماره‌های ۹۲۲۳۳۲۲ و ۹۱۲۰۹۱۲ و ۱۲۳۴۳۲۱ هیچ‌یک ژند نیستند.
تعداد شماره‌های ژندی که با صفر شروع نشوند و عدد ۷ رقمی متناظر آن‌ها از ۷۸۰۱۳۸۹ کوچکتر باشد، چند تا است؟ اگر این تعداد را M بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم M^2 (مقدار M به توان ۲) بر Δ چند است؟
جواب:

مسئله‌ی سوم: علی باینری‌نویس! ۲۰ نمره
علی می‌خواهد مقدار مبنای دوی اعداد ۱، ۲، ۳، ... تا ۱۳۸۹ را به ترتیب در یک خط پشت سر هم و بدون فاصله بنویسد. منتهی چون جوهر خودکارش کم است، تصمیم می‌گیرد که یک ایده‌ی جالب بزند!
برای هر عدد i ، بعد از آن که علی رشته‌ی مبنای دوی عدد i را محاسبه کرد (فرض کنید طول این رشته l باشد)، می‌خواهد کمترین تعداد بیت (صفر یا یک) را به انتهای رشته‌ی i که تا کنون نوشته شده بیافزاید، به طوری که l بیت سمت راست این رشته، عیناً معادل دودویی i باشند.
با این روش، شروع دنباله به صورت $۱۰۱۱۰۰۱۰۱۱۰...۱۰$ خواهد بود؛ که ۱۱ بیت نوشته‌شده مقادیر مبنای دوی اعداد ۱ تا ۶ را به روش علی دارند.
طول این دنباله در نهایت، وقتی اعداد ۱ تا ۱۳۸۹ نوشته شد، را L می‌نامیم. مقدار باقی‌مانده‌ی $(L \times ۱۳۸۹)$ بر Δ چند است؟

جواب:

مسئله‌ی چهارم: م.م.م مسئله‌ی چهارم: م.م.م
 ۶۰ گانگستر دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند و بازی مثل مثل موتوله را انجام می‌دهند. بازی «مثل مثل موتوله (یا مختصراً م.م.م)» با شروع از x به این صورت است که:

ابتدا گانگستر x ام، سرش را روی میز می‌گذارد و می‌خوابد. سپس، x امین گانگستر بیدار بعد از x می‌خوابد (او را x_2 می‌نامیم). سپس x_2 امین گانگستر بیدار بعد از x_2 می‌خوابد و ... یعنی در مرحله‌ی i اگر گانگستر با شماره p_i بخوابد، در مرحله‌ی بعد با شروع از اولین گانگستر بیدار بعد از p_i به اندازه‌ی p_i نفر بیدار می‌شماریم و جلو می‌رویم. برنده‌ی این بازی، اگر اولین خواننده k_1 باشد، w_{k_1} است.

برای مثال اگر $x = 1$ باشد، ابتدا گانگستر شماره ۱، بعد ۲، بعد ۴، بعد ۸ و ... می‌خوانند.

مقدار $T = w_1 \times w_2 \times w_3 \times \dots \times w_{59} \times w_60$ را در نظر بگیرید. باقی‌مانده‌ی تقسیم T بر Δ چند است؟

جواب:

مسئله‌ی پنجم: جام جهانی مسئله‌ی پنجم: جام جهانی

در جام جهانی فوتبال ۳۲ تیم حضور دارند. اگر این ۳۲ تیم را بر اساس رتبه‌شان در فیفا مرتب کنیم تیم‌ها رتبه ۱ تا ۳۲ می‌گیرند. (رتبه ۱ قوی‌ترین تیم و رتبه ۳۲ ضعیف‌ترین تیم است).

کامران معتقدست که اگر دو تیم با رتبه‌ی a و b (هر دو بین ۱ تا ۳۲) با هم مسابقه بدهند با احتمال $\frac{a \times (100 - D)}{a + b}$ تیم b برنده می‌شود و با احتمال $\frac{b \times (100 - D)}{a + b}$ تیم a برنده می‌شود و با احتمال $\frac{a \times (100 - D)}{a + b}$ تیم b برنده می‌شود.

فرض کنیم تیم‌های با رتبه‌ی ۷ و ۱۳ و ۲۱ و ۳۰ در یک گروه در مرحله مقدماتی حضور داشته باشند. می‌دانیم هر دو تیم با هم یک بار بازی می‌کنند (جمعاً ۶ بازی) و هر پیروزی ۳ امتیاز و هر مساوی یک امتیاز دارد. در پایان مرحله‌ی گروهی، نفر اول و دوم گروه بالا می‌آیند. ترتیب نهایی تیم‌ها در یک گروه بر اساس امتیاز است؛ تیمی که امتیاز بیشتری کسب کند، رتبه کم‌تری کسب می‌کند. در صورت تساوی امتیازها، تیم‌های با امتیاز مساوی بر اساس رتبه اولیه‌شان مرتب می‌شوند؛ به‌طوری که تیمی که رتبه‌ی اولیه‌ی کمتری داشته باشد، رتبه‌ی نهایی کمتری هم پیدا می‌کند. برای مثال اگر تمام ۶ بازی مساوی بشود، تیم‌های با رتبه‌ی اولیه‌ی ۷ و ۱۳ از این گروه صعود می‌کنند.

کامران می‌خواهد احتمال صعود تیم با رتبه ۲۱ از این گروه را پیدا کند. اگر این احتمال P باشد، عدد $[P \times \Delta^2]$ را به‌عنوان جواب بنویسید.

جواب:

«خندان بمانید!»