

چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران (مرحله ی دوم)

مسأله ی ۱ ۱۰ نمره

n گلوله با وزن های متفاوت و یک ترازوی دوکفه ای بدون وزنه داده شده است. نشان دهید که با حداکثر $\left\lfloor \frac{3^n}{3} - 2 \right\rfloor$ بار وزن کردن می توان سبک ترین و سنگین ترین گلوله ها را مشخص کرد. روش وزن کردن خود را به دقت توضیح دهید و فرمول فوق را برای کلیه ی مقادیر n اثبات کنید. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ - بخوانید سقف x - کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x است.)

مسأله ی ۲ ۱۰ نمره

مجموعه ی $A = \{1, 2, \dots, k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله ی T_1, T_2, \dots, T_n یک زنجیره به طول n خوانده می شود، اگر هر یک از T_i ها یک زیرمجموعه از مجموعه A باشد و برای هر $1 \leq i \leq n - 1$ داشته باشیم: $T_i \subseteq T_{i+1}$. تعداد زنجیره های به طول n را محاسبه کنید و ادعای خود را اثبات نمایید.

چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران (مرحله‌ی دوم)

مسئله‌ی ۳ ۱۵ نمره

در یک جزیره k انسان نما زندگی می‌کنند. این انسان‌نماها دو گونه‌اند: عده‌ای راستگو هستند و به هر پرسش جواب درست می‌دهند. عده‌ای دیگر دروغگو هستند و به هر پرسش جواب نادرست می‌دهند.

اگر انسانی به این جزیره برود، می‌تواند با مطرح کردن پرسشهایی مانند پرسشهای زیر که جواب آنها بله یا خیر است، این دو دسته را از هم تشخیص دهد.

به عنوان مثال، فرض کنید A راستگو و B دروغگو است. در این صورت، پرسشها و پاسخها می‌تواند به صورت زیر باشد:

پرسش از A : آیا B دروغگو است؟ جواب: بله
پرسش از A : آیا A و B دروغگو هستند؟ جواب: خیر
پرسش از B : آیا $۲ + ۲ = ۴$? جواب: خیر
پرسش از B : آیا تو دروغگو هستی؟ جواب: خیر

n تبهکار به این جزیره فرار کرده‌اند. این افراد تبهکار، در پاسخ به هر پرسش هر طور که بخواهند جواب می‌دهند، یعنی گاهی جواب درست و گاهی جواب نادرست می‌دهند.

کارآگاهی وظیفه دارد به این جزیره رفته و با مطرح کردن پرسشهایی نظیر پرسشهای فوق (فقط با جواب بله یا خیر) این تبهکاران را شناسایی و بازداشت کند.

فرض کنید که تبهکاران و انسان‌نماها از نظر شکل ظاهری تفاوتی ندارند ولی یکدیگر را خوب می‌شناسند و می‌دانند که هر کدام از چه گروهی (راستگو، دروغگو یا تبهکار) هستند. همچنین می‌دانیم کارآگاه از قبل اطلاعی در مورد این که هر یک از ساکنین این جزیره از کدام گروه است، ندارد.

(الف) ثابت کنید که اگر $n = 1$ و $k \geq 2$ ، کارآگاه می‌تواند فرد تبهکار را شناسایی کند.

(ب) ثابت کنید که در حالت کلی اگر $k > n$ ، کارآگاه می‌تواند افراد تبهکار را شناسایی کند.

(ج) ثابت کنید که اگر $k \leq n$ ، کارآگاه نمی‌تواند افراد تبهکار را شناسایی کند. یعنی افراد تبهکار می‌توانند طوری به پرسشهای کارآگاه جواب دهند که کارآگاه هیچگاه نتواند مطمئن شود که یک فرد، تبهکار است.

چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران (مرحله‌ی دوم)

مسئله‌ی ۴ ۱۵ نمره

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم عناصر آرایه‌ی a را محاسبه می‌کند. عنصر i ام آرایه‌ی a را در این الگوریتم با نماد $a[i]$ نشان داده‌ایم.

(۱) $a[0]$ را مساوی ۰ و $a[1]$ را مساوی ۱ قرار بده.

(۲) k را مساوی ۲ قرار بده.

(۳) $a[k]$ را مساوی با $a[k - 1]$ قرار بده.

(۴) به مقدار $a[k]$ یکی اضافه کن.

(۵) F را مساوی ۱ قرار بده.

(۶) برای هر i که $1 \leq i \leq k - 1$ این مرحله را تکرار کن:

• برای هر z که $0 \leq z \leq i - 1$ این مرحله را تکرار کن:

○ اگر $a[k] - a[i] = a[i] - a[z]$ است، F را مساوی ۰ قرار بده.

(۷) اگر $F = 0$ است، به مرحله‌ی (۴) برو.

(۸) به مقدار k یکی اضافه کن و اگر $k \leq 1373$ است، به مرحله‌ی (۳) برو.

(۹) پایان

الگوریتم فوق به زبان پاسکال در صفحه‌ی بعد نوشته شده است.

مسئله به این صورت است:

الف) مقدار $a[0]$ ، $a[1]$ ، ... و $a[10]$ در انتهای الگوریتم چقدر است؟

ب) تمام i هایی را پیدا کنید که مقدار $a[i]$ در انتهای الگوریتم بر ۳ قابل قسمت باشد. برای ادعای خود دلیل بیاورید.

ج) مقدار $a[1373]$ در انتهای الگوریتم چقدر است؟ چرا؟

چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران (مرحله‌ی دوم)

```
program Problem4;
  var
    a: array[0..1373] of LongInt;
    k, i, j, F: Integer;
begin
  a[0] := 0; a[1] := 1;
  for k := 2 to 1373 do
    begin
      a[k] := a[k - 1];
      repeat
        a[k] := a[k] + 1;
        F := 1;
        for i := 1 to k - 1 do
          for j := 0 to i - 1 do
            if (a[k] - a[i] = a[i] - a[j]) then
              F := 0;
          until (F = 1);
        end;
      end;
    end.
end.
```