



بازی رنگی

دیروز ببعی و گاوی پس از چریدن طولانی خسته شدند و تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. در این بازی ۳ دایره وجود دارد که هر یک به $3n$ قطاع برابر تقسیم شده‌اند. ابتدا ببعی هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۱ را با یکی از رنگ‌های زرد، نارنجی و بنفش رنگ می‌کند. گاوی پس از دیدن رنگ‌آمیزی ببعی، هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۲ را با یکی از همین سه رنگ، رنگ می‌کند. ببعی نیز پس از دیدن رنگ‌آمیزی گاوی، دایره‌ی شماره‌ی ۲ را روی دایره‌ی شماره‌ی ۱ می‌گذارد و آن را به هر مقداری که می‌خواهد، می‌چرخاند به طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌ی شماره‌ی ۱ منطبق شود. حال دایره‌ی شماره‌ی ۳ روی دو دایره‌ی دیگر گذاشته می‌شود، طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌های زیرین منطبق شود. پس از این کار هر قطاع دایره‌ی شماره‌ی ۳ به صورت زیر رنگ می‌شود:

- اگر رنگ دو قطاع زیرین دایره‌های شماره‌ی ۱ و ۲ یکسان بود، این قطاع را نیز به همان رنگ درمی‌آوریم.
- اگر رنگ دو قطاع زیرین یکسان نبود، رنگ این قطاع را به رنگ سوم (رنگی که در دو قطاع زیرین نیامده است) درمی‌آوریم.

گاوی اصلیتی هلندی دارد و به همین دلیل به رنگ نارنجی بسیار علاقه‌مند است و می‌خواهد تا حد ممکن تعداد قطاع‌های نارنجی دایره‌ی شماره‌ی ۳ زیاد شود؛ در حالی که ببعی می‌خواهد از این کار جلوگیری کند.

الف) ثابت کنید گاوی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداقل n قطاع نارنجی داشته‌باشد. (۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید ببعی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداکثر n قطاع نارنجی داشته‌باشد. (۲۰ نمره)



وزنه‌ها و ماشین جادویی

بعضی $3n - 2$ وزنه‌ی یک گرمی و دو وزنه‌ی نیم گرمی دارد که همگی از نظر ظاهری کاملاً شبیه به هم هستند ($n > 2$). وزنه‌ها با شماره‌های ۱ تا $3n$ شماره‌گذاری شده‌اند، ولی وزن هیچ وزنه‌ای را نمی‌دانیم. گاوی یک ماشین جادویی دارد. در هر بار استفاده از ماشین جادویی، گاوی می‌تواند ۲ وزنه را روی ماشین جادویی‌اش قرار دهد و ماشین جادویی به او می‌گوید که آیا مجموع وزن این دو وزنه، عددی طبیعی است یا خیر.

الف) ثابت کنید گاوی همواره می‌تواند با حداکثر $2n - 1$ بار استفاده از ماشین جادویی خود یک وزنه‌ی نیم گرمی را پیدا کند. (۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید گاوی نمی‌تواند روشی ارائه دهد که با کمتر از $2n - 1$ بار استفاده از ماشین جادویی تضمین کند که یک وزنه‌ی نیم گرمی را می‌تواند پیدا کند. (۳۰ نمره)



گاوِ خسیس

کشوری که گاوی و ببعی در آن زندگی می‌کنند، دارای n شهر می‌باشد ($n > 2$). بین برخی از شهرهای کشور، جاده‌ی دوطرفه کشیده شده است. هم‌چنین می‌دانیم بین هیچ دو شهری بیش از یک جاده وجود ندارد. از آن جایی که مردم این کشور صمیمی هستند، می‌دانیم در هر شهری که باشیم، با استفاده از جاده‌های این کشور می‌توانیم به هر شهر دیگر که بخواهیم، برسیم. ارزش یک شهر برابر است با تعداد شهرهایی که به طور مستقیم با یک جاده به آن شهر متصل هستند. ببعی در یکی از شهرهای این کشور قرار دارد. گاوی که در شهر دیگری است، می‌خواهد به دیدن ببعی برود. می‌دانیم اگر گاوی در مسیر رفتن به شهر ببعی، از شهری با ارزش k عبور کند، باید k تومان عوارض بدهد (شهر آغاز و پایان مسیر نیز مشمول عوارض هستند). از آن جایی که گاوی دوست ندارد زیاد پول خرج کند، مسیری را انتخاب می‌کند که کمترین هزینه را داشته باشد.

الف) فرض کنید محل گاوی و ببعی مشخص باشد. ثابت کنید به ازای هر n ($n > 2$)، می‌توان جاده‌های بین شهری را طوری قرار داد که گاوی مجبور باشد دست کم $3n - 5$ تومان به دولت عوارض بدهد. (۱۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر n ($n > 2$)، هر طوری جاده‌ها را قرار دهیم و ببعی و گاوی در هر دو شهری باشند، گاوی با حداکثر $3n - 5$ تومان می‌تواند به هدفش برسد. (۳۵ نمره)



انتقال مهره‌های گاوی

نقاط صحیح صفحه مختصات (نقاطی که طول و عرض آن‌ها عددی صحیح است) را در نظر بگیرید. ببعی n نقطه از این نقاط را به رنگ آبی درآورده است و n مهره نیز در n نقطه‌ی دیگر از صفحه قرار داده است (در هر نقطه یک مهره). می‌دانیم نقاط آبی و مهره‌ها ویژگی‌های زیر را دارند:

- در هیچ نقطه‌ی آبی، مهره‌ای قرار ندارد.
- هیچ دو نقطه‌ی آبی در یک سطر نیستند.

ببعی و گاوی تصمیم می‌گیرند تا مهره‌ها را به نقاط آبی برسانند (هر مهره را در یک نقطه‌ی آبی قرار دهند). هر دو برای این کار یک ماشین مخصوص به خود دارند. ماشین گاوی در هر مرحله می‌تواند تعدادی از مهره‌ها (و یا هیچ مهره‌ای) را ثابت نگه دارد و بقیه را به طور همزمان یک واحد به بالا، چپ، راست یا پایین حرکت دهد. توجه کنید که جهت حرکت مهره‌های مختلف در یک مرحله می‌تواند با هم یکسان نباشد و همچنین پس از انجام یک مرحله ممکن است در یک خانه بیش از یک مهره قرار گیرد. ماشین ببعی نیز مانند ماشین گاوی عمل می‌کند با این تفاوت که ماشین ببعی در یک مرحله نمی‌تواند بیش از یک مهره را در یک نقطه قرار دهد.

فرض کنید کمترین تعداد مراحل لازم برای رساندن مهره‌ها به نقاط آبی به طوری که در هر نقطه‌ی آبی یک مهره قرار گیرد، با استفاده از ماشین گاوی t_1 و با استفاده از ماشین ببعی t_2 باشد. ثابت کنید $t_1 = t_2$. (۶۰ نمره)

توجه: شما با اثبات $t_2 \leq 2t_1$ نیمی از نمره را می‌توانید بگیرید.