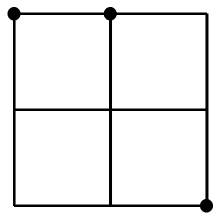
مسأله‌ی ۸ .... ۱۵ نمره

یک شبکه $n \times n$ مجموعه نقاطی از صفحه است که دارای مختصات صحیح هستند و هر یک از مختصات آنها عددی بزرگتر یا مساوی با ۱ و کوچکتر یا مساوی با n است. یک زیرمجموعه از نقاط یک شبکه را یک می‌نامیم اگر در بین تمام پاره خطهایی که می‌توان بین دو به دوی آنها کشید هیچ دو تایی دارای طول مساوی نباشند. به عنوان مثال شکل زیر یک مجموعه عجیب در شبکه ۳ × ۳ را نشان می‌دهد:



۱) در یک شبکه ۴ × ۴ یک مجموعه عجیب شامل ۴ نقطه پیدا کنید.

۲) ثابت کنید که در هر شبکه $n \times n$ هر مجموعه عجیب حداکثر دارای n نقطه است.

مسأله‌ی ۹ .... ۳۰ نمره

یک ماتریس از اعداد طبیعی داده شده است. ابتدا هریک از سطرهای این ماتریس را از سمت چپ به راست به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سپس هر یک از ستونهای این ماتریس را از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

ثابت کنید که در ماتریس حاصل سطرها به صورت صعودی مرتب شده باقی می‌مانند. توضیحات خود را دقیق و با رسم شکل ارائه نمایید.

مسأله‌ی ۱۰ .... ۲۰ نمره

یک صفحه شطرنج 8×8 را در نظر بگیرید. یک قرار دادن ۸ مهره در این صفحه است به طوری که هیچ دو تایی از این مهره‌ها در یک سطر یا در یک ستون قرار نگرفته باشند.

۶۴ عدد صحیح متفاوت را در خانه‌های صفحه شطرنج قرار دهید به طوری که برای هر چیدن پراکنده مجموع اعداد نوشته شده در خانه‌هایی که در آنها مهره قرار گرفته است برابر با مقدار ثابت ۱۰۰ باشد.

مسأله‌ی ۱۱ .... ۳۵ نمره

یک جایگشت $p_1, p_2, \ldots, p_n$ از مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ یک نامیده می‌شود اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ شرایط زیر برقرار باشد:

الف) اگر $2i \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i}$ ،

ب) اگر $2i + 1 \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i+1}$.

۱) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $p_1 \leq p_i$.

۲) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، تعداد اعضای مجموعه

$$\{i \mid 1 \leq i \leq n, p_i \geq p_2\}$$

بزرگتر یا مساوی با $\frac{n-1}{2}$ است.

۳) اگر $n = 2^k - 1$ باشد، T_k را مساوی با تعداد جایگشتهای خوب مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ تعریف می‌کنیم. یک رابطه بازگشتی برای محاسبه T_k پیدا کنید.