

## پاسخ تشریحی

### دوازدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. هر عضوی از  $U$  وجودش در سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  یکی از چهار حالت زیر را می‌تواند داشته باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر  $4^5$  یا  $2^{10}$  می‌باشد.

A	B	C
✓	✓	✓
✓	-	-
-	✓	-
-	-	-

۲. چون مجموع اعداد موجود در مربع‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  با مجموع اعداد موجود در مربع‌های  $A$ ،  $D$  و  $C$  برابر است، بنابراین مجموع دو عدد موجود در  $B$  با مجموع دو عدد موجود در  $D$  برابر است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که مجموع دو

A	B
D	C

عدد موجود در یک مربع با مجموع دو عدد موجود در هر مربع دیگری برابر است که این مجموع برابر با  $19$  می‌باشد. لذا اعداد  $1$ ،  $2$ ، ...،  $18$  را به  $9$  دسته  $(1, 18)$ ،  $(2, 17)$ ، ...،  $(9, 10)$  دسته‌بندی کرده و آنها را به  $9!$  طریق بین  $9$  مربع تقسیم کرده و سپس هر زوج را به  $2!$  طریق در مثلث‌های موجود در هر مربع قرار می‌دهیم. که تعداد کل روش‌ها  $9! \times 2^9$  خواهد شد.

۳. بهترین حالت ممکن آن است که دور تادور شبکه، ششلول بندها ایستاده و هر کدام از آنها به سمت بیرون شلیک کنند که در این صورت تعداد آنها برابر  $(n-2)^2 - n^2$ ؛ یعنی  $4n - 4$  خواهد شد.

۴. ابتدا سه عدد از هفت عدد را به  $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۳۵ طریق انتخاب کرده و آنها را به ترتیب صعودی در خانه‌های ۱، ۴ و ۷ قرار می‌دهیم، سپس دو عدد از چهار عدد را به  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  یعنی ۶ طریق انتخاب کرده و آنها را به ترتیب صعودی در خانه‌های ۲ و ۵ قرار می‌دهیم، و در نهایت نیز دو عدد باقی‌مانده را به ترتیب صعودی در خانه‌های ۳ و ۶ قرار می‌دهیم. بنابراین جواب مورد نظر  $6 \times 35$ ؛ یعنی  $210$  می‌باشد.

۵. یکی از رئوس از درجه واحد را انتخاب و آن را با یکی از سه رنگ موجود رنگ می‌کنیم. رأس متصل به آن، سپس رأس متصل به دومی و ... را به دو طریق می‌توانیم رنگ کنیم، بنابراین تعداد روش‌های مطلوب برابر  $2^{11} \times 3$ ؛ یعنی ۶۱۴۴ خواهد شد.

۶. حرکت دو دور کامل انجام یافته است که آن را به صورت ردیفی، به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$\boxed{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \boxed{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \boxed{1}$

در نمایش فوق  $\boxed{x}$  نشانگر آن است که در جایگاه  $x$  توقف یقیناً انجام شده است و  $\underline{y}$  نشانگر آن است که جایگاه  $y$  قابل توقف است. اگر تعداد پرش‌های دور اول صفر باشد آن حرکت به  $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش‌های دور اول یک بار باشد انتخاب آن جایگاه به  $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش‌های دور اول دو بار باشد انتخاب آن دو جایگاه به  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ ؛ یعنی  $10$  طریق ممکن است و بالاخره اگر تعداد پرش‌های دور اول سه بار باشد انتخاب آن سه جایگاه به ۴ طریق (۲۴۶ یا ۲۴۷ یا ۲۵۷ یا ۳۵۷) ممکن است که مجموع کل آن طرق برابر ۲۱ می‌شود. معلوم است که تعداد پرش‌های دور اول ۴ یا بیشتر نمی‌تواند باشد. تعداد طرق پرش‌ها در دور دوم مستقل از دور اول نیز برابر ۲۱ می‌شود که طبق اصل ضرب تعداد کل طرق برابر  $21 \times 21$ ؛ یعنی ۴۴۱ خواهد شد.

	3	2	1
3		1	3
2	1		2
1	3	2	

۷. اگر خانه‌های موجود در خانه‌های قطر اصلی را به ترتیب با رنگ‌های ۱، ۲، ۳ و ۱ رنگ‌آمیزی کنیم سایر خانه‌ها به ناچار رنگ‌هایی پیدا می‌کنند که به صورت لاتین در جدول نمایش داده شده‌اند.

۸. S باید هر دو عضو ۱ و ۸ را داشته باشد. از بین اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ تعدادی می‌توانند در S نباشند، اگر این تعداد برابر ۰ باشد به  $\binom{6}{0}$ ؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر این تعداد برابر ۱ باشد به  $\binom{6}{1}$ ؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد مورد نظر ۲ باشد به  $\binom{6}{2}$ ؛ یعنی ۱۵ طریق ممکن است. و بالاخره اگر تعداد اشاره شده برابر ۳ باشد به ۴ طریق ممکن است. یادآوری می‌شود که از هر دو عضو متوالی حداقل یکی در S موجود است. بنابراین تعداد کل حالات برابر ۲۱ می‌باشد.

۹. هر مربع واحد یک قطر اصلی و یک قطر فرعی و کل شبکه ۹ قطر اصلی و ۹ قطر فرعی دارد که برای رسیدن به منظور لازم است یک قطر اصلی و یک قطر فرعی رسم شود. انتخاب این دو قطر به  $\binom{9}{1} \times \binom{9}{1}$ ؛ یعنی ۸۱ طریق ممکن است.

۱۰. اگر رنگ‌آمیزی کامل شده باشد با تغییر رنگ هر یک از ۸ نقطهٔ ردیف اول (فقط یک نقطه) رنگ تمامی نقاط بالای آن از جمله رنگ نقطهٔ موجود در ردیف ۵ تغییر می‌کند، بنابراین در آخرین حرکت که از آن مهدی است، او می‌تواند نقطهٔ آخر از ۸ نقطهٔ ردیف اول را چنان رنگ‌آمیزی کند که رنگ نقطهٔ موجود در ردیف ۵ مورد دلخواه او باشد.

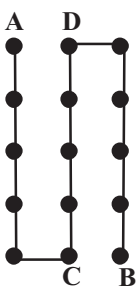
۱	۲	۳	...	n
۲	۳	۴	...	n+۱
۳	۴	۵	...	n+۲
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	m+۱	m+۲	...	m+n-۱

۱۱. اگر در خانهٔ بالا و سمت چپ جدول عدد ۱ و در خانهٔ پایین سمت راست جدول عدد  $m+n-1$  را قرار دهیم آنگاه جدول به صورت منحصربه‌فرد، به شکل مقابل پر خواهد شد:

۱۲. در بعضی حالات خاص می‌توان با دانستن اعداد بعضی از خانه‌ها، عدد موجود در خانه‌ای را کشف کرد ولی در حالت کلی جواب مورد نظر برابر  $mn$  می‌باشد. برای رد چهار گزینهٔ دیگر می‌توانید جدول  $2 \times 2$  را بررسی کنید.

۱۳. خانه  $(1, 2)$  به دو طریق قابل پر شدن می باشد ( $0$  یا  $2$ ) و هر یک از ستون های چهارگانه دیگر متناسب با ستون قبلی خود به سه طریق می توانند پر شوند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر  $3^4 \times 2$  یعنی  $162$  می باشد.

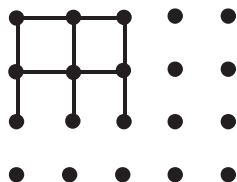
۱۴. کسی که در نوبتش با  $2$  سنگریزه روبه رو شود یکی از آن دو را برداشته و برنده می شود. بنابراین به ازای  $n = 2$  نفر اول برنده می شود. به ازای  $n = 3$  نفر اول به ناچار  $1$  سنگریزه برداشته و نفر دوم با  $2$  سنگریزه مواجه شده و برنده می شود. به ازای  $n = 4$  نفر اول  $1$  سنگریزه برداشته و نفر دوم با  $3$  سنگریزه مواجه شده و بازنده می شود. به ازای  $n = 5$  نفر اول  $1$  سنگریزه برداشته و نفر دوم با  $4$  سنگریزه مواجه شده و برنده می شود. به همین ترتیب معلوم می شود که اگر تعداد سنگریزه ها زوج باشد نفر اول و در غیر این صورت نفر دوم برنده خواهد شد.



۱۵. شکل مقابل شکلی است که از هر نقطه آن می توان به نقطه دیگری رفت و کمترین پاره خط ممکن را نیز داراست ( $14$  پاره خط). معلوم است که با حذف هر پاره خط دلخواهی از آن دو نقطه یافت خواهند شد که به هم مسیری نداشته باشند، بنابراین لازم است به شکل فوق یک یا چند پاره خط اضافه کنیم. اگر مجاز بودیم از پاره خط های غیر واحد نیز استفاده کنیم می توانستیم  $A$  را به  $B$  وصل کنیم که در این صورت شکل به دست آمده (پانزده ضلعی فضایی) خاصیت مورد نظر را داشت، ولی چون مجاز به استفاده از پاره خط های غیر واحد نیستیم به ناچار  $B$  را به  $C$  و  $A$  را به  $D$  وصل می کنیم که شکل حاصل خاصیت مورد نظر را خواهد داشت و در ضمن دارای  $16$  پاره خط به طول واحد می باشد.

۱۶. الگوریتم رسیدن از  $(84, 35)$  به  $(91, 49)$  به شکل زیر می باشد:

$$\begin{aligned} (84, 35) &\longrightarrow (49, 35) \longrightarrow (14, 35) \longrightarrow (14, 21) \longrightarrow (14, 7) \\ &\longrightarrow (21, 7) \longrightarrow (28, 7) \longrightarrow (35, 7) \longrightarrow (42, 7) \\ &\longrightarrow (42, 49) \longrightarrow (91, 49) \end{aligned}$$



۱۷. اگر شبکه مقابل را چهار بار به ماشین بدهیم شکل مطلوب به دست خواهد آمد.

۱۸. تعداد شهرهایی که هر دو لوله‌اش از یک مرکز باشد ۰، ۲، ۴ یا ۶ می‌تواند باشد که تعداد طرق لوله‌کشی در هر یک از چهار حالت فوق به ترتیب  $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$  خواهد شد که مجموع تمام آن طرق ۱۴۱ می‌شود.

۱۹. هر یک از مؤلفه‌های نقاط سه بار افزایش و یک بار کاهش می‌یابد. مختصات نقاط  $A_1, A_2, \dots, A_p$  به ترتیب به شکل  $(0, 1)$ ،  $(2, 3)$ ،  $(5, 0)$ ،  $(9, 4)$ ،  $(4, 9)$ ،  $(10, 15)$ ،  $(17, 8)$ ،  $(25, 16)$ ،  $(16, 25)$ ،  $(26, 35)$  خواهد بود.

۲۰. در هر مرحله دو گردو به کل گردوها اضافه و یا دو گردو از کل گردوها کم می‌شود، بنابراین اگر کل گردوها فرد باشد در نهایت نیز فرد، و اگر کل گردوها زوج باشد در نهایت نیز کل گردوها زوج خواهد بود. مجموع کل گردوها در حالات  $a, b, c$  و  $d$  به ترتیب فرد، زوج، فرد و زوج می‌باشد، بنابراین  $a$  به  $b$ ،  $b$  به  $c$ ،  $c$  به  $d$  و  $d$  قابل تبدیل نیستند. و اما  $a$  به  $c$  و نیز  $b$  به  $d$  قابل تبدیلند که نحوه تبدیل هر یک به شکل زیر می‌باشد:

**نحوه تبدیل  $a$  به  $c$ :** اولی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.

● اولی، دومی و سومی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.

● اولی، دومی، سومی، چهارمی و پنجمی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.

اگر الگوریتم فوق را ادامه دهیم به حالت  $c$  خواهیم رسید.

**نحوه تبدیل  $b$  به  $d$ :** زوج‌های  $(1, 2)$ ،  $(3, 4)$ ،  $(5, 6)$ ،  $(7, 8)$ ،  $(9, 10)$ ،  $(11, 12)$ ،  $(13, 14)$ ،  $(15, 16)$ ،  $(17, 18)$ ،  $(19, 20)$ ،  $(21, 22)$ ،  $(23, 24)$ ،  $(25, 26)$ ،  $(27, 28)$ ،  $(29, 30)$ ،  $(31, 32)$ ،  $(33, 34)$ ،  $(35, 36)$ ،  $(37, 38)$ ،  $(39, 40)$ ،  $(41, 42)$ ،  $(43, 44)$ ،  $(45, 46)$ ،  $(47, 48)$ ،  $(49, 50)$ ،  $(51, 52)$ ،  $(53, 54)$ ،  $(55, 56)$ ،  $(57, 58)$ ،  $(59, 60)$ ،  $(61, 62)$ ،  $(63, 64)$ ،  $(65, 66)$ ،  $(67, 68)$ ،  $(69, 70)$ ،  $(71, 72)$ ،  $(73, 74)$ ،  $(75, 76)$ ،  $(77, 78)$ ،  $(79, 80)$ ،  $(81, 82)$ ،  $(83, 84)$ ،  $(85, 86)$ ،  $(87, 88)$ ،  $(89, 90)$ ،  $(91, 92)$ ،  $(93, 94)$ ،  $(95, 96)$ ،  $(97, 98)$ ،  $(99, 100)$ ،  $(101, 102)$ ،  $(103, 104)$ ،  $(105, 106)$ ،  $(107, 108)$ ،  $(109, 110)$ ،  $(111, 112)$ ،  $(113, 114)$ ،  $(115, 116)$ ،  $(117, 118)$ ،  $(119, 120)$ ،  $(121, 122)$ ،  $(123, 124)$ ،  $(125, 126)$ ،  $(127, 128)$ ،  $(129, 130)$ ،  $(131, 132)$ ،  $(133, 134)$ ،  $(135, 136)$ ،  $(137, 138)$ ،  $(139, 140)$ ،  $(141, 142)$ ،  $(143, 144)$ ،  $(145, 146)$ ،  $(147, 148)$ ،  $(149, 150)$ ،  $(151, 152)$ ،  $(153, 154)$ ،  $(155, 156)$ ،  $(157, 158)$ ،  $(159, 160)$ ،  $(161, 162)$ ،  $(163, 164)$ ،  $(165, 166)$ ،  $(167, 168)$ ،  $(169, 170)$ ،  $(171, 172)$ ،  $(173, 174)$ ،  $(175, 176)$ ،  $(177, 178)$ ،  $(179, 180)$ ،  $(181, 182)$ ،  $(183, 184)$ ،  $(185, 186)$ ،  $(187, 188)$ ،  $(189, 190)$ ،  $(191, 192)$ ،  $(193, 194)$ ،  $(195, 196)$ ،  $(197, 198)$ ،  $(199, 200)$ ،  $(201, 202)$ ،  $(203, 204)$ ،  $(205, 206)$ ،  $(207, 208)$ ،  $(209, 210)$ ،  $(211, 212)$ ،  $(213, 214)$ ،  $(215, 216)$ ،  $(217, 218)$ ،  $(219, 220)$ ،  $(221, 222)$ ،  $(223, 224)$ ،  $(225, 226)$ ،  $(227, 228)$ ،  $(229, 230)$ ،  $(231, 232)$ ،  $(233, 234)$ ،  $(235, 236)$ ،  $(237, 238)$ ،  $(239, 240)$ ،  $(241, 242)$ ،  $(243, 244)$ ،  $(245, 246)$ ،  $(247, 248)$ ،  $(249, 250)$ ،  $(251, 252)$ ،  $(253, 254)$ ،  $(255, 256)$ ،  $(257, 258)$ ،  $(259, 260)$ ،  $(261, 262)$ ،  $(263, 264)$ ،  $(265, 266)$ ،  $(267, 268)$ ،  $(269, 270)$ ،  $(271, 272)$ ،  $(273, 274)$ ،  $(275, 276)$ ،  $(277, 278)$ ،  $(279, 280)$ ،  $(281, 282)$ ،  $(283, 284)$ ،  $(285, 286)$ ،  $(287, 288)$ ،  $(289, 290)$ ،  $(291, 292)$ ،  $(293, 294)$ ،  $(295, 296)$ ،  $(297, 298)$ ،  $(299, 300)$ ،  $(301, 302)$ ،  $(303, 304)$ ،  $(305, 306)$ ،  $(307, 308)$ ،  $(309, 310)$ ،  $(311, 312)$ ،  $(313, 314)$ ،  $(315, 316)$ ،  $(317, 318)$ ،  $(319, 320)$ ،  $(321, 322)$ ،  $(323, 324)$ ،  $(325, 326)$ ،  $(327, 328)$ ،  $(329, 330)$ ،  $(331, 332)$ ،  $(333, 334)$ ،  $(335, 336)$ ،  $(337, 338)$ ،  $(339, 340)$ ،  $(341, 342)$ ،  $(343, 344)$ ،  $(345, 346)$ ،  $(347, 348)$ ،  $(349, 350)$ ،  $(351, 352)$ ،  $(353, 354)$ ،  $(355, 356)$ ،  $(357, 358)$ ،  $(359, 360)$ ،  $(361, 362)$ ،  $(363, 364)$ ،  $(365, 366)$ ،  $(367, 368)$ ،  $(369, 370)$ ،  $(371, 372)$ ،  $(373, 374)$ ،  $(375, 376)$ ،  $(377, 378)$ ،  $(379, 380)$ ،  $(381, 382)$ ،  $(383, 384)$ ،  $(385, 386)$ ،  $(387, 388)$ ،  $(389, 390)$ ،  $(391, 392)$ ،  $(393, 394)$ ،  $(395, 396)$ ،  $(397, 398)$ ،  $(399, 400)$ ،  $(401, 402)$ ،  $(403, 404)$ ،  $(405, 406)$ ،  $(407, 408)$ ،  $(409, 410)$ ،  $(411, 412)$ ،  $(413, 414)$ ،  $(415, 416)$ ،  $(417, 418)$ ،  $(419, 420)$ ،  $(421, 422)$ ،  $(423, 424)$ ،  $(425, 426)$ ،  $(427, 428)$ ،  $(429, 430)$ ،  $(431, 432)$ ،  $(433, 434)$ ،  $(435, 436)$ ،  $(437, 438)$ ،  $(439, 440)$ ،  $(441, 442)$ ،  $(443, 444)$ ،  $(445, 446)$ ،  $(447, 448)$ ،  $(449, 450)$ ،  $(451, 452)$ ،  $(453, 454)$ ،  $(455, 456)$ ،  $(457, 458)$ ،  $(459, 460)$ ،  $(461, 462)$ ،  $(463, 464)$ ،  $(465, 466)$ ،  $(467, 468)$ ،  $(469, 470)$ ،  $(471, 472)$ ،  $(473, 474)$ ،  $(475, 476)$ ،  $(477, 478)$ ،  $(479, 480)$ ،  $(481, 482)$ ،  $(483, 484)$ ،  $(485, 486)$ ،  $(487, 488)$ ،  $(489, 490)$ ،  $(491, 492)$ ،  $(493, 494)$ ،  $(495, 496)$ ،  $(497, 498)$ ،  $(499, 500)$ ،  $(501, 502)$ ،  $(503, 504)$ ،  $(505, 506)$ ،  $(507, 508)$ ،  $(509, 510)$ ،  $(511, 512)$ ،  $(513, 514)$ ،  $(515, 516)$ ،  $(517, 518)$ ،  $(519, 520)$ ،  $(521, 522)$ ،  $(523, 524)$ ،  $(525, 526)$ ،  $(527, 528)$ ،  $(529, 530)$ ،  $(531, 532)$ ،  $(533, 534)$ ،  $(535, 536)$ ،  $(537, 538)$ ،  $(539, 540)$ ،  $(541, 542)$ ،  $(543, 544)$ ،  $(545, 546)$ ،  $(547, 548)$ ،  $(549, 550)$ ،  $(551, 552)$ ،  $(553, 554)$ ،  $(555, 556)$ ،  $(557, 558)$ ،  $(559, 560)$ ،  $(561, 562)$ ،  $(563, 564)$ ،  $(565, 566)$ ،  $(567, 568)$ ،  $(569, 570)$ ،  $(571, 572)$ ،  $(573, 574)$ ،  $(575, 576)$ ،  $(577, 578)$ ،  $(579, 580)$ ،  $(581, 582)$ ،  $(583, 584)$ ،  $(585, 586)$ ،  $(587, 588)$ ،  $(589, 590)$ ،  $(591, 592)$ ،  $(593, 594)$ ،  $(595, 596)$ ،  $(597, 598)$ ،  $(599, 600)$ ،  $(601, 602)$ ،  $(603, 604)$ ،  $(605, 606)$ ،  $(607, 608)$ ،  $(609, 610)$ ،  $(611, 612)$ ،  $(613, 614)$ ،  $(615, 616)$ ،  $(617, 618)$ ،  $(619, 620)$ ،  $(621, 622)$ ،  $(623, 624)$ ،  $(625, 626)$ ،  $(627, 628)$ ،  $(629, 630)$ ،  $(631, 632)$ ،  $(633, 634)$ ،  $(635, 636)$ ،  $(637, 638)$ ،  $(639, 640)$ ،  $(641, 642)$ ،  $(643, 644)$ ،  $(645, 646)$ ،  $(647, 648)$ ،  $(649, 650)$ ،  $(651, 652)$ ،  $(653, 654)$ ،  $(655, 656)$ ،  $(657, 658)$ ،  $(659, 660)$ ،  $(661, 662)$ ،  $(663, 664)$ ،  $(665, 666)$ ،  $(667, 668)$ ،  $(669, 670)$ ،  $(671, 672)$ ،  $(673, 674)$ ،  $(675, 676)$ ،  $(677, 678)$ ،  $(679, 680)$ ،  $(681, 682)$ ،  $(683, 684)$ ،  $(685, 686)$ ،  $(687, 688)$ ،  $(689, 690)$ ،  $(691, 692)$ ،  $(693, 694)$ ،  $(695, 696)$ ،  $(697, 698)$ ،  $(699, 700)$ ،  $(701, 702)$ ،  $(703, 704)$ ،  $(705, 706)$ ،  $(707, 708)$ ،  $(709, 710)$ ،  $(711, 712)$ ،  $(713, 714)$ ،  $(715, 716)$ ،  $(717, 718)$ ،  $(719, 720)$ ،  $(721, 722)$ ،  $(723, 724)$ ،  $(725, 726)$ ،  $(727, 728)$ ،  $(729, 730)$ ،  $(731, 732)$ ،  $(733, 734)$ ،  $(735, 736)$ ،  $(737, 738)$ ،  $(739, 740)$ ،  $(741, 742)$ ،  $(743, 744)$ ،  $(745, 746)$ ،  $(747, 748)$ ،  $(749, 750)$ ،  $(751, 752)$ ،  $(753, 754)$ ،  $(755, 756)$ ،  $(757, 758)$ ،  $(759, 760)$ ،  $(761, 762)$ ،  $(763, 764)$ ،  $(765, 766)$ ،  $(767, 768)$ ،  $(769, 770)$ ،  $(771, 772)$ ،  $(773, 774)$ ،  $(775, 776)$ ،  $(777, 778)$ ،  $(779, 780)$ ،  $(781, 782)$ ،  $(783, 784)$ ،  $(785, 786)$ ،  $(787, 788)$ ،  $(789, 790)$ ،  $(791, 792)$ ،  $(793, 794)$ ،  $(795, 796)$ ،  $(797, 798)$ ،  $(799, 800)$ ،  $(801, 802)$ ،  $(803, 804)$ ،  $(805, 806)$ ،  $(807, 808)$ ،  $(809, 810)$ ،  $(811, 812)$ ،  $(813, 814)$ ،  $(815, 816)$ ،  $(817, 818)$ ،  $(819, 820)$ ،  $(821, 822)$ ،  $(823, 824)$ ،  $(825, 826)$ ،  $(827, 828)$ ،  $(829, 830)$ ،  $(831, 832)$ ،  $(833, 834)$ ،  $(835, 836)$ ،  $(837, 838)$ ،  $(839, 840)$ ،  $(841, 842)$ ،  $(843, 844)$ ،  $(845, 846)$ ،  $(847, 848)$ ،  $(849, 850)$ ،  $(851, 852)$ ،  $(853, 854)$ ،  $(855, 856)$ ،  $(857, 858)$ ،  $(859, 860)$ ،  $(861, 862)$ ،  $(863, 864)$ ،  $(865, 866)$ ،  $(867, 868)$ ،  $(869, 870)$ ،  $(871, 872)$ ،  $(873, 874)$ ،  $(875, 876)$ ،  $(877, 878)$ ،  $(879, 880)$ ،  $(881, 882)$ ،  $(883, 884)$ ،  $(885, 886)$ ،  $(887, 888)$ ،  $(889, 890)$ ،  $(891, 892)$ ،  $(893, 894)$ ،  $(895, 896)$ ،  $(897, 898)$ ،  $(899, 900)$ ،  $(901, 902)$ ،  $(903, 904)$ ،  $(905, 906)$ ،  $(907, 908)$ ،  $(909, 910)$ ،  $(911, 912)$ ،  $(913, 914)$ ،  $(915, 916)$ ،  $(917, 918)$ ،  $(919, 920)$ ،  $(921, 922)$ ،  $(923, 924)$ ،  $(925, 926)$ ،  $(927, 928)$ ،  $(929, 930)$ ،  $(931, 932)$ ،  $(933, 934)$ ،  $(935, 936)$ ،  $(937, 938)$ ،  $(939, 940)$ ،  $(941, 942)$ ،  $(943, 944)$ ،  $(945, 946)$ ،  $(947, 948)$ ،  $(949, 950)$ ،  $(951, 952)$ ،  $(953, 954)$ ،  $(955, 956)$ ،  $(957, 958)$ ،  $(959, 960)$ ،  $(961, 962)$ ،  $(963, 964)$ ،  $(965, 966)$ ،  $(967, 968)$ ،  $(969, 970)$ ،  $(971, 972)$ ،  $(973, 974)$ ،  $(975, 976)$ ،  $(977, 978)$ ،  $(979, 980)$ ،  $(981, 982)$ ،  $(983, 984)$ ،  $(985, 986)$ ،  $(987, 988)$ ،  $(989, 990)$ ،  $(991, 992)$ ،  $(993, 994)$ ،  $(995, 996)$ ،  $(997, 998)$ ،  $(999, 1000)$ ،  $(1001, 1002)$ ،  $(1003, 1004)$ ،  $(1005, 1006)$ ،  $(1007, 1008)$ ،  $(1009, 1010)$ ،  $(1011, 1012)$ ،  $(1013, 1014)$ ،  $(1015, 1016)$ ،  $(1017, 1018)$ ،  $(1019, 1020)$ ،  $(1021, 1022)$ ،  $(1023, 1024)$ ،  $(1025, 1026)$ ،  $(1027, 1028)$ ،  $(1029, 1030)$ ،  $(1031, 1032)$ ،  $(1033, 1034)$ ،  $(1035, 1036)$ ،  $(1037, 1038)$ ،  $(1039, 1040)$ ،  $(1041, 1042)$ ،  $(1043, 1044)$ ،  $(1045, 1046)$ ،  $(1047, 1048)$ ،  $(1049, 1050)$ ،  $(1051, 1052)$ ،  $(1053, 1054)$ ،  $(1055, 1056)$ ،  $(1057, 1058)$ ،  $(1059, 1060)$ ،  $(1061, 1062)$ ،  $(1063, 1064)$ ،  $(1065, 1066)$ ،  $(1067, 1068)$ ،  $(1069, 1070)$ ،  $(1071, 1072)$ ،  $(1073, 1074)$ ،  $(1075, 1076)$ ،  $(1077, 1078)$ ،  $(1079, 1080)$ ،  $(1081, 1082)$ ،  $(1083, 1084)$ ،  $(1085, 1086)$ ،  $(1087, 1088)$ ،  $(1089, 1090)$ ،  $(1091, 1092)$ ،  $(1093, 1094)$ ،  $(1095, 1096)$ ،  $(1097, 1098)$ ،  $(1099, 1100)$ ،  $(1101, 1102)$ ،  $(1103, 1104)$ ،  $(1105, 1106)$ ،  $(1107, 1108)$ ،  $(1109, 1110)$ ،  $(1111, 1112)$ ،  $(1113, 1114)$ ،  $(1115, 1116)$ ،  $(1117, 1118)$ ،  $(1119, 1120)$ ،  $(1121, 1122)$ ،  $(1123, 1124)$ ،  $(1125, 1126)$ ،  $(1127, 1128)$ ،  $(1129, 1130)$ ،  $(1131, 1132)$ ،  $(1133, 1134)$ ،  $(1135, 1136)$ ،  $(1137, 1138)$ ،  $(1139, 1140)$ ،  $(1141, 1142)$ ،  $(1143, 1144)$ ،  $(1145, 1146)$ ،  $(1147, 1148)$ ،  $(1149, 1150)$ ،  $(1151, 1152)$ ،  $(1153, 1154)$ ،  $(1155, 1156)$ ،  $(1157, 1158)$ ،  $(1159, 1160)$ ،  $(1161, 1162)$ ،  $(1163, 1164)$ ،  $(1165, 1166)$ ،  $(1167, 1168)$ ،  $(1169, 1170)$ ،  $(1171, 1172)$ ،  $(1173, 1174)$ ،  $(1175, 1176)$ ،  $(1177, 1178)$ ،  $(1179, 1180)$ ،  $(1181, 1182)$ ،  $(1183, 1184)$ ،  $(1185, 1186)$ ،  $(1187, 1188)$ ،  $(1189, 1190)$ ،  $(1191, 1192)$ ،  $(1193, 1194)$ ،  $(1195, 1196)$ ،  $(1197, 1198)$ ،  $(1199, 1200)$ ،  $(1201, 1202)$ ،  $(1203, 1204)$ ،  $(1205, 1206)$ ،  $(1207, 1208)$ ،  $(1209, 1210)$ ،  $(1211, 1212)$ ،  $(1213, 1214)$ ،  $(1215, 1216)$ ،  $(1217, 1218)$ ،  $(1219, 1220)$ ،  $(1221, 1222)$ ،  $(1223, 1224)$ ،  $(1225, 1226)$ ،  $(1227, 1228)$ ،  $(1229, 1230)$ ،  $(1231, 1232)$ ،  $(1233, 1234)$ ،  $(1235, 1236)$ ،  $(1237, 1238)$ ،  $(1239, 1240)$ ،  $(1241, 1242)$ ،  $(1243, 1244)$ ،  $(1245, 1246)$ ،  $(1247, 1248)$ ،  $(1249, 1250)$ ،  $(1251, 1252)$ ،  $(1253, 1254)$ ،  $(1255, 1256)$ ،  $(1257, 1258)$ ،  $(1259, 1260)$ ،  $(1261, 1262)$ ،  $(1263, 1264)$ ،  $(1265, 1266)$ ،  $(1267, 1268)$ ،  $(1269, 1270)$ ،  $(1271, 1272)$ ،  $(1273, 1274)$ ،  $(1275, 1276)$ ،  $(1277, 1278)$ ،  $(1279, 1280)$ ،  $(1281, 1282)$ ،  $(1283, 1284)$ ،  $(1285, 1286)$ ،  $(1287, 1288)$ ،  $(1289, 1290)$ ،  $(1291, 1292)$ ،  $(1293, 1294)$ ،  $(1295, 1296)$ ،  $(1297, 1298)$ ،  $(1299, 1300)$ ،  $(1301, 1302)$ ،  $(1303, 1304)$ ،  $(1305, 1306)$ ،  $(1307, 1308)$ ،  $(1309, 1310)$ ،  $(1311, 1312)$ ،  $(1313, 1314)$ ،  $(1315, 1316)$ ،  $(1317, 1318)$ ،  $(1319, 1320)$ ،  $(1321, 1322)$ ،  $(1323, 1324)$ ،  $(1325, 1326)$ ،  $(1327, 1328)$ ،  $(1329, 1330)$ ،  $(1331, 1332)$ ،  $(1333, 1334)$ ،  $(1335, 1336)$ ،  $(1337, 1338)$ ،  $(1339, 1340)$ ،  $(1341, 1342)$ ،  $(1343, 1344)$ ،  $(1345, 1346)$ ،  $(1347, 1348)$ ،  $(1349, 1350)$ ،  $(1351, 1352)$ ،  $(1353, 1354)$ ،  $(1355, 1356)$ ،  $(1357, 1358)$ ،  $(1359, 1360)$ ،  $(1361, 1362)$ ،  $(1363, 1364)$ ،  $(1365, 1366)$ ،  $(1367, 1368)$ ،  $(1369, 1370)$ ،  $(1371, 1372)$ ،  $(1373, 1374)$ ،  $(1375, 1376)$ ،  $(1377, 1378)$ ،  $(1379, 1380)$ ،  $(1381, 1382)$ ،  $(1383, 1384)$ ،  $(1385, 1386)$ ،  $(1387, 1388)$ ،  $(1389, 1390)$ ،  $(1391, 1392)$ ،  $(1393, 1394)$ ،  $(1395, 1396)$ ،  $(1397, 1398)$ ،  $(1399, 1400)$ ،  $(1401, 1402)$ ،  $(1403, 1404)$ ،  $(1405, 1406)$ ،  $(1407, 1408)$ ،  $(1409, 1410)$ ،  $(1411, 1412)$ ،  $(1413, 1414)$ ،  $(1415, 1416)$ ،  $(1417, 1418)$ ،  $(1419, 1420)$ ،  $(1421, 1422)$ ،  $(1423, 1424)$ ،  $(1425, 1426)$ ،  $(1427, 1428)$ ،  $(1429, 1430)$ ،  $(1431, 1432)$ ،  $(1433, 1434)$ ،  $(1435, 1436)$ ،  $(1437, 1438)$ ،  $(1439, 1440)$ ،  $(1441, 1442)$

(۹۸, ۹۹) را انتخاب کرده و به هر یک از اعضای ۲۵ زوج اول یک گردو اضافه و از هر یک از اعضای ۲۵ زوج دیگر یک گردو بر می داریم که به دنباله زیر خواهیم رسید:

۲, ۳, ۴, ۵, ..., ۴۹, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ..., ۹۵, ۹۶, ۹۷, ۹۸

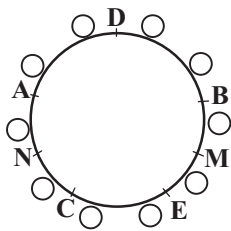
● زوج های (۲, ۳), (۴, ۵), ..., (۴۸, ۴۹) را انتخاب کرده و به هر یک از اعضای آن زوج ها یک گردو اضافه و زوج های (۵۱, ۵۲), (۵۳, ۵۴), ..., (۹۹, ۹۸) را انتخاب کرده و از هر یک از اعضای آن یک گردو بر می داریم که به دنباله زیر خواهیم رسید،

۳, ۴, ۵, ..., ۴۹, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ..., ۹۵, ۹۶, ۹۷

با تکرار الگوریتم فوق پس از مدتی به دنباله متقارن زیر می رسیم:

۵۰, ۵۱, ۵۰, ..., ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۱, ۵۰, ۵۱, ۵۰

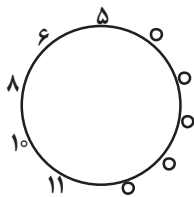
باز با تکرار آن الگوریتم به دنباله  $d$  خواهیم رسید.



۲۱. برای تولید  $a$  هر یک از کمان های  $AB, BC, CD, DE$  و  $EA$  سه بار و سپس کمان  $AB$  را ۴ بار دیگر و کمان  $MN$  را ۱۴ بار انتخاب می کنیم.

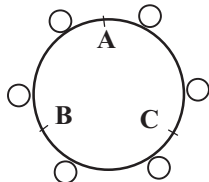
وضعیت  $b$  قابل تولید نیست.

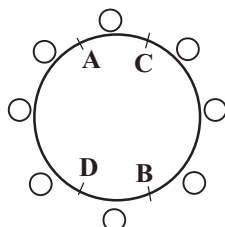
کمان هایی که شامل هر دو خانه ۱۲ و ۴ باشند مجموعاً حداکثر ۴ بار به کار می روند. بنابراین کمان هایی که شامل ۱۲ بوده ولی شامل ۴ نباشند حداقل برابر ۸ می باشد (چنین کمانی فقط کمانی می تواند باشد که هر چهار عدد ۹, ۱۲, ۸ و ۸ را در بر دارد).



بنابراین کمان یاد شده دقیقاً ۸ بار و کمان ۹ و ۱۲ و ۴ و ۹ دقیقاً ۱ بار به کار می رود. اگر گردوهای اضافه شده را کم کنیم به حالت مقابل می رسیم که قابل تولید نیست.

برای تولید وضعیت  $c$  هر یک از کمان های بزرگ  $AB, BC, CA$  را ۵۱ بار انتخاب می کنیم.





برای تولید وضعیت  $d$  کمان سمت راست  $AB$  را ۱ بار، کمان سمت راست  $CD$  را ۲ بار و بالاخره کمان سمت چپ  $AB$  را ۴ بار انتخاب می‌کنیم.

۲۲. اگر مقدار کالای تحویلی به راست و پایین از کارخانه  $A$  را به ترتیب  $a$  و  $b$  بنامیم آنگاه اگر مقدار کالای اضافه شده به خاطر  $a$  در هر یک از ۴۹ نقطه موجود را به صورت  $xa$  نمایش دهیم، در هر یک از آن ۴۹ نقطه مقدار  $x$  به شکل زیر پیدا می‌شود که در جدول ارائه شده هر عدد برابر مجموع دو عدد بالا و سمت چپ خود می‌باشد (غیر از ستون و سطر آخر)

◦	۱	۱	۱	۱	۱	◦
◦	۱	۲	۳	۴	۵	◦
◦	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	◦
◦	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	◦
◦	۱	۵	۱۵	۳۵	۷۱	◦
◦	۱	۶	۲۱	۵۶	۱۲۶	◦
◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦

مجموع کل اعداد جدول فوق برابر ۴۶۱ می‌شود. برای  $b$  نیز جدولی مشابه جدول فوق یافت می‌شود. با در نظر گرفتن  $a$  و  $b$  اولیه مقدار ماده دریافتی توسط  $B$  برابر  $(a+b) \times ۴۶۲$ ؛ یعنی ۲۳۱۰۰ می‌شود که با توجه به صورت مسأله مقدار کالای تولیدی  $۲ \times ۲۳۱۰۰$ ؛ یعنی ۴۶۲۰۰ به دست می‌آید.

۲۳. برای رسیدن از  $A$  به  $B$  یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

I) چهار حرکت راست ( $R$ )، یک حرکت پایین ( $L$ ) و سه حرکت بالا ( $U$ ). تعداد دنباله‌های متشکل از چهار  $R$ ، یک  $L$  و سه  $U$  که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می‌باشد برابر  $\binom{۴}{۴} \binom{۷}{۳} \binom{۸}{۱}$ ؛ یعنی ۲۸۰ می‌باشد.

(II) پنج حرکت راست (R)، یک حرکت چپ (L) و دو حرکت بالا (U). تعداد دنباله‌های متشکل از پنج R، یک L و دو U که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می‌باشد برابر  $\binom{8}{1} \binom{7}{5} \binom{2}{2}$ ؛ یعنی ۱۶۸ می‌باشد.

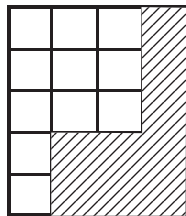
معلوم است که تعداد کل مسیرهای مطلوب برابر  $168 + 280$ ؛ یعنی ۴۴۸ می‌باشد.

۲۴. فرض می‌کنیم حرکت اول به سمت راست باشد در این صورت برای رسیدن به BC ده واحد طی خواهد شد که آن را به صورت aaaaaaaaaa نمایش می‌دهیم. هدف قرار دادن سه علامت به نشانه مکان‌های تغییر جهت در بین aها می‌باشد که این امر به  $\binom{9}{3}$ ؛ یعنی ۸۴ طریق امکان‌پذیر است (بین هر دو a ی متوالی یک جا خالی برای قرار دادن مکان نما وجود دارد و بین ده عدد a مجموعاً نه جا خالی وجود دارد). اگر حرکت اول به سمت بالا باشد نیز برای رسیدن به BC به ۸۴ طریق می‌توان عمل کرده مجموع کل مسیرهای مطلوب  $84 + 84$ ؛ یعنی ۱۶۸ خواهد شد.

۲۵. می‌دانیم تعداد کل جایگشت‌ها برابر  $7!$  می‌باشد. در  $\frac{1}{7}$  از جایگشت‌ها رقم اول ۱، در  $\frac{1}{7}$  از آنها رقم اول ۲، ... و بالاخره در  $\frac{1}{7}$  از جایگشت‌ها رقم اول ۷ می‌باشد که در این صورت  $\sum |\pi_i - i|$  بر رقم اول کل جایگشت‌ها  $(0 + 1 + 2 + \dots + 6) \times 6!$ ؛ یعنی  $21 \times 6!$  خواهد شد. این مجموع بر ارقام دوم، سوم، ... و هفتم نیز به ترتیب برابر ۱۶، ۱۳، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۲۱ می‌باشد، بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\sum |\pi_i - i|}{7!} = \frac{6! \times (21 + 16 + 13 + 12 + 13 + 16 + 21)}{7!} = 16$$

۲۶. گزاره‌های درست را با خانه سیاه و گزاره‌های غلط را با خانه سفید نمایش می‌دهیم (مانند شکل زیر).



با ارتفاع خانه‌های سیاه ستون‌ها یک دنباله چهار عضوی می‌سازیم. دنباله متناظر به شکل ارائه شده ۰، ۲، ۲، ۵ می‌باشد، معلوم است که با شرایط مسأله همه دنباله‌های به دست آمده صعودی خواهند بود. تعداد ۰های دنباله را  $x_0$  تعداد ۱های دنباله را  $x_1$ ، ... و بالاخره تعداد ۵های دنباله را  $x_5$

می‌نامیم که در این صورت به معادله  $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$  می‌رسیم که در مجموعه اعداد نامنفی



۹؛ یعنی ۱۲۶ جواب دارد، به ازای هر جوابی از معادله یک دنباله صعودی و به ازای هر دنباله‌ای صعودی یک جواب مطلوب برای جدول به دست می‌آید.

۲۷. اولاً در هر مرحله دو عضو از اعضای دنباله کم می‌شود، بنابراین برای آن که در انتهای کار فقط یک عدد باقی بماند لازم است تعداد اعضای دنباله فرد باشد. ثانیاً می‌دانیم زوجیت عدد  $a + b + c$  با زوجیت عدد  $a + c - b$  یکی است، بنابراین برای آن که در انتهای کار عددی زوج باقی بماند لازم است مجموع اعداد زوج باشد. ثالثاً با تکرار عمل اشاره شده صرف نظر از آن که  $a$ ،  $b$  و  $c$  کدام سه عدد متوالی باشند عدد نهایی برای دنباله  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8, x_9$ ، عدد  $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_8 + x_9$  می‌باشد.

تنها دنباله‌ای از دنباله‌های داده شده که در هر سه شرط فوق صدق می‌کند دنباله زیر می‌باشد:

(۴، ۷، ۶، ۳، ۷، ۵، ۷، ۸)

۲۸. برای آن که شخص پس از ۴ حرکت به نقطه A برگردد باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیافتد:  
 I) شخص روی یک لوزی حرکت کند. احتمال آن که حرکت اول، دوم، سوم و چهارم شخص مطلوب باشد به ترتیب  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{4}{6}$ ،  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{6}$  می‌باشد که در این صورت احتمال رسیدن به مقصد با طی کردن یک لوزی برابر  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6}$ ؛ یعنی  $\frac{4}{216}$  خواهد بود.

II) شخص یک پاره خط به طول ۲ (نه لزوماً پاره خط راست) را طی کرده و همان مسیر را برگردد که در این صورت احتمال مطلوب بودن حرکات اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب برابر  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{5}{6}$ ،  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{6}$  خواهد بود. بنابراین احتمال رسیدن به مقصد به طریق اشاره شده برابر  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ ؛ یعنی  $\frac{5}{216}$  خواهد بود.

III) ابتدا شخص یکی از ۶ پاره خط اطراف خود را به صورت رفت و برگشت طی کرده و سپس همین عمل را با همان پاره خط یا با پاره خط دیگر تکرار کند، که در این صورت احتمال مطلوب بودن هر یک از حرکات چهارگانه او به ترتیب  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{6}{6}$  و  $\frac{1}{6}$  در کل  $\frac{6}{216}$  می‌باشد.

با در نظر گرفتن سه حالت ممکن احتمال رسیدن به مقصد  $\frac{4}{216} + \frac{5}{216} + \frac{6}{216}$ ؛ یعنی  $\frac{15}{216}$  یا  $\frac{5}{72}$

می‌باشد.

۱	۳	۲	۴
	۱		
		۱	
			۱

۲۹. سطر اول به  $3!$  طریق قابل پر شدن می باشد. بدون آن که به کلیت مسأله لطمه ای وارد شود فرض می کنیم جدول مورد نظر مطابق شکل مقابل باشد که در این صورت خانه  $(3, 2)$  به دو حالت پر می شود، یا با ۳ و یا با ۴.

در حالت اول جدول به شکل «الف» و در حالت دوم جدول به شکل «ب» در می آید.

۱	۳	۲	۴
	۱	۳	
		۱	
			۱

شکل ب

۱	۳	۲	۴
	۱	۴	
		۱	
			۱

شکل الف

جدول الف فقط به یک حالت ولی جدول ب به سه حالت می تواند پر شود، بنابراین جواب مورد نظر  $3 \times 3! + 1 \times 3! = 24$  می باشد.

۳۰. در مرحله اول ۴، در مرحله دوم ۹، در مرحله سوم ۲۵ و در مرحله چهارم ۳۶ کارت می توان بر روی میز با شرایط مسأله قرار داد که در این صورت تعداد کل کارت ها برابر  $1 + 4 + 9 + 25 + 36 = 75$  خواهد شد. به راحتی می توانید بررسی کنید که تعداد کل کارت های روی میز پس از  $n$  مرحله برابر عبارت زیر

$$\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{19}{3} \right\rfloor^2 + \dots + \left\lfloor \frac{4n+3}{3} \right\rfloor^2$$

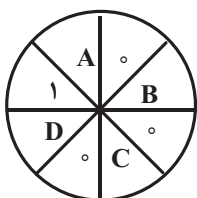
می باشد:

	N	O	P
M			
I	J	K	L
E	F	G	H
A	B	C	D

۳۱. تعداد پاره خط های افقی ۱۲ و نیز تعداد پاره خط های عمودی نیز ۱۲ می باشد، بنابراین اگر از هر پاره خط فقط یک بار عبور کنیم مدت زمان لازم ۲  $\times 12 + 1 \times 12 = 36$  ثانیه خواهد بود. اما شرط لازم برای آن که بتوان یک گراف را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و با عبور از هر یال دقیقاً یک بار چنان رسم کرد که نقطه پایان همان نقطه شروع باشد، آن است که درجه

همه رئوس آن زوج باشد که در گراف رسم شده درجه ۸ رأس؛ یعنی رئوس A, B, C, E, H, I, L, N و O فرد بوده و به ازای هر دو رأس فرد که به یکدیگر وصل هستند یک حرکت اضافی لازم است. اگر حرکت به صورت زیر باشد، مدت زمان لازم ۴۲ ثانیه خواهد بود.

A.B.F.G.C.B.C.D.H.G.K.L.H.L.P.O.K.J.N.O.N.M.I.J.F.E.I  
\_E.A

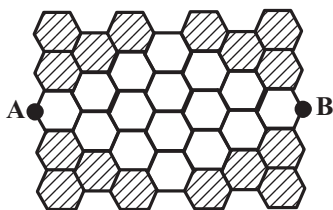


۳۲. هر یک از خانه‌های A, B, C و D را به دو طریق می‌توان پر کرد. بنابراین تعداد کل شیوه‌ها برابر  $2^4$ ؛ یعنی ۱۶ می‌شود. اما حالت  $(1, 0, 0, 0)$  برای (D, A, B, C) مانند حالت  $(0, 0, 0, 1)$  و حالت  $(0, 1, 0, 0)$  مانند حالت  $(0, 0, 1, 0)$  می‌باشد. بنابراین جواب مطلوب ۱۴ می‌باشد.

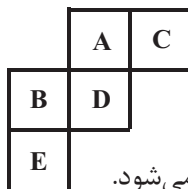
۳۳. به راحتی قابل درک است که  $T(S) = S$  و  $T(\emptyset) = \emptyset$  حاصل  $T(\{1\})$ ,  $T(\{2\})$ ,  $T(\{3\})$ ,  $T(\{4\})$ ,  $T(\{5\})$  و  $T(\{6\})$  را به دلخواه  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{5\}$  و  $\{6\}$  در نظر می‌گیریم که این کار به ۶!؛ یعنی ۷۲۰ طریق ممکن است. حال اگر فرض کنیم  $T(\{x_1\}) = \{y_1\}$ ,  $T(\{x_2\}) = \{y_2\}$ , ...,  $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$  از مجموعه‌های دو عضوی به بعد عضو متناظر به هر زیرمجموعه به صورت منحصر به فرد به شکل زیر پیدا می‌شود:

$$T(\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}) = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$$

۳۴. اگر بخواهیم رنگ خانه‌ای عوض شود از خانه مجاور آن به آن وارد شده و از آن خارج می‌شویم و اگر خانه‌ای خانه گذر باشد و نخواهیم رنگ آن عوض شود به آن وارد شده و پس از خروج از آن دوباره به آن خانه برگشته و خروج از آن را تکرار می‌کنیم.



۳۵. خانه‌هایی که هاشور خورده‌اند در مسیر مطلوب شرکت ندارند. شکل باقی‌مانده یک شبکه  $4 \times 4$  می‌باشد که تعداد مسیرهای کوتاه موجود از گوشه چپ و پایین آن به گوشه راست و بالای آن برابر  $\binom{4}{4}$ ؛ یعنی ۷۰ می‌باشد.

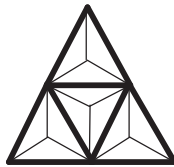


۳۶. دو حالت زیر پیش می‌آید:

I) در خانه‌های A و B دو عدد ۱ و ۲ باشد که در این حالت آن دو خانه را به ۲! و سه خانه دیگر را به ۳! طریق می‌توان پر کرد که کل حالات  $2! \times 3!$ ؛ یعنی ۱۲ می‌شود.

(II) در خانه‌های A و B دو عدد ۱ و ۳ باشد که در این حالت آن دو خانه را به ۲! طریق می‌توان پر کرد (مثلاً  $A = ۱$  و  $B = ۳$ ). عدد ۲ وابسته به این که  $A = ۱$  یا  $B = ۱$  به صورت منحصر به فرد در یک خانه به ترتیب در C یا E قرار خواهد گرفت و دو عدد ۴ و ۵ نیز به دو حالت در خانه‌های باقی مانده می‌توانند قرار گیرند. بنابراین در این حالت نیز تعداد کل حالات  $۲ \times ۲$ ؛ یعنی ۴ می‌شود. با توجه به دو قسمت قبل تعداد کل جواب‌ها  $۱۲ + ۴$ ؛ یعنی ۱۶ می‌شود.


۳۷. با در نظر گرفتن ۴ مثلث پر رنگ در شکل زیر حالات زیر پیش می‌آید:



(I) تعداد مثلث‌های سیاه باشد که این کار به  $\begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱ طریق ممکن است.  
 (II) تعداد مثلث‌های سیاه یک باشد که این کار به  $\begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۱۲ طریق ممکن است.  
 (III) تعداد مثلث‌های سیاه دو باشد که در این صورت آن دو مثلث نمی‌توانند در داخل یک مثلث پر رنگ قرار گیرند. رنگ کردن دو مثلث با شرط فوق به  $3 - \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۵۱ طریق ممکن است.

(IV) تعداد مثلث‌های سیاه ۳ باشد که در این صورت آن سه مثلث در داخل سه مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به  $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۹۰ طریق امکان پذیر است.  
 (V) تعداد مثلث‌های سیاه ۴ باشد که در این صورت آن چهار مثلث در داخل چهار مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به  $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ؛ یعنی ۵۴ طریق ممکن است.  
 مجموع کل حالات به دست آمده  $۵۴ + ۹۰ + ۵۱ + ۱۲ + ۱$ ؛ یعنی ۲۰۸ می‌شود.

	C	B	
			A

۳۸. خطوط جدول کاغذی را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. طریقه ساخت گزینه‌های ب، ج، د و ه را با دنباله نشان می‌دهیم، در این نمایش‌ها X؛ یعنی این که کاغذ را از خط X به طرف داخل؛ یعنی به شکل  و X؛ یعنی این که کاغذ را

