



مرحله‌ی سوم سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر  
۱۹ تیر ۱۴۰۲  
آزمون روز دوم

Italy

ایتالیا

کشور ایتالیا شامل  $n$  کشور و  $n - 1$  جاده‌ی یک طرفه است که جاده‌ها با صرف نظر از جهت‌شان کشور را همبند می‌کنند. کشور ایتالیا در جهت جذب توریست قانون عجیبی را وضع کرده است! اگر شما از جاده‌ای در جهت درست آن استفاده کنید، دولت یک واحد پول به شما می‌دهد. اما اگر در جهت مخالف استفاده کنید، جریمه می‌شوید و باید یک واحد پول پرداخت کنید. حال فرض کنید که شما می‌خواهید در یک سفر تابستانه به آنجا بروید و علاوه بر اینکه از سفرتان لذت ببرید، یک پولی هم به جیب بزنید! زیبایی ایتالیا را تعریف می‌کنیم بیشینه مقدار پولی که می‌توان در یک سفر از آن کسب کرد. یعنی از یک شهر دلخواه شروع کنیم، و طی دنباله حرکتی دلخواه به شهر دلخواهی برسیم. می‌توان نشان داد زیبایی کشور عددی محدود است و بی‌نهایت نمی‌شود.

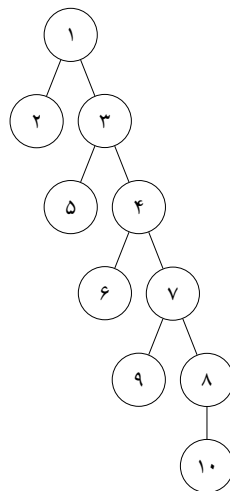
در این سوال شما در هر بخش جاده‌های ایتالیا را می‌دانید اما جهت‌شان را نه. برای همین باید مجموع زیبایی ایتالیا را به ازای هر  $2^{n-1}$  حالت از جهت‌دهی جاده‌ها محاسبه کنید.

ورودی

در هر بخش کشور ایتالیا به صورت یک درخت توصیف می‌شود. در بعضی از بخش‌ها از اصطلاح درخت بیتی استفاده شده است که تعریفش مطابق زیر است:

- به ازای هر عدد طبیعی  $x$  تابع  $f(x)$  را تعریف می‌کنیم  $x$ : منهای تعداد بیت‌های یک خودش در مبنای دو. برای مثال  $f(5) = 5 - 2 = 3$  می‌باشد. منظور از درخت بیتی درختی است که یال  $i$  امش بین راس‌های  $i + 1$  و  $f(i + 1)$  می‌باشد.

برای مثال درخت بیتی ۱۰ راسی به شکل زیر است:



## خروجی

## ● بخش اول (۳۰ نمره)

در حالی که ایتالیا درخت بیئی 10 راسی باشد، جواب به پیمانهای  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

## ● بخش دوم (۳۵ نمره)

در حالی که ایتالیا مسیر  $5 \cdot 10^3$  راسی باشد، جواب به پیمانهای  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

## ● بخش سوم (۳۵ نمره)

در حالی که ایتالیا درخت بیئی  $5 \cdot 10^3$  راسی باشد، جواب به پیمانهای  $\Delta$  چقدر است؟ توجه کنید که درخت بیئی تاثیری در راه حل ندارد و هدف حل سوال برای هر درختی است.

پاسخ شما: .....



مرحله ی سوم سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر  
۱۹ تیر ۱۴۰۲  
آزمون روز دوم

Money Maker

پول چاپکن

ارشیا به شهربازی ال‌دورادو رفته و تصمیم گرفته است فرصت را غنیمت دانسته و از تنها فرصتی که در آن می‌تواند هم بازی کند و هم پول درآورد بهترین استفاده‌ی ممکن را کند!

در این شهربازی تعدادی (نه لزومن متناهی!) دستگاه بازی وجود دارد که هرکدام آن‌ها تعدادی ژتون به عنوان ورودی دریافت می‌نماید و در صورتی که بازیکن بتواند بازی را با موفقیت به پایان برساند مقدار مشخصی طلا به او جایزه می‌دهد. در هنگام ورود به شهربازی تمام دستگاه‌های آن به بازدیدکنندگان معرفی می‌شوند و در اصل بازدیدکنندگان اطلاعات لازم برای بازی کردن هر دستگاه را دارند. اطلاعات لازم برای هر دستگاه به صورت زیر است:

- دستگاه  $i$  ام مقدار  $a_i$  ژتون به عنوان ورودی دریافت می‌کند.
- دستگاه  $i$  ام به عنوان جایزه  $b_i$  کیلو طلا به بازیکن می‌دهد!
- هر دستگاه را می‌توان به هر تعداد دلخواهی بازی کرد و محدودیتی در تعداد استفاده از آن‌ها نیست.

ارشیا با تمام دستگاه‌های موجود در این شهربازی آشنا است و نمی‌خواهد حتی ذره‌ای از سود کردن بگذرد. برای همین نحوه‌ی بردن در هرکدام از دستگاه‌ها را یاد گرفته است و می‌تواند هرکدام از آن‌ها را در صورت شروع کردن با موفقیت به پایان برساند. در نتیجه از شما کمک خواسته تا در بخش‌های مختلف برای حساب کردن بیش‌ترین میزان جایزه‌ی قابل کسب از دستگاه‌های شهربازی به او کمک کنید.

خروجی

- بخش اول (۳۳ نمره)

فرض کنید تعداد دستگاه‌های شهربازی بی‌نهایت است، و ورودی دستگاه  $i$  ام برابر  $i$  امین واحد معمول اسکناس‌ها باشد که بصورت اعداد ۱ و ۲ و ۵ ضربدر توان‌های مختلف ۱۰ تولید می‌شود؛ یعنی دنباله‌ی ورودی دستگاه‌ها برابر ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰، ... می‌باشد. همچنین فرض کنید جایزه‌ی دستگاه  $i$  برابر  $b_i = 3^{i-1}$  باشد، اگر ارشیا در ابتدا ۴۱۷۹۶۸۲۲۰۹۸۷۳۰۹۸۴۴۲۹۷۵۲۸۸۴۷۵۲۸۸۵ ژتون داشته باشد، بیش‌ترین جایزه‌ی قابل کسب توسط او برابر چند کیلو طلا به پیمان‌های  $\Delta$  است؟

پاسخ شما: .....

- بخش دوم (۳۳ نمره)

فرض کنید تعداد دستگاه‌های شهربازی بی‌نهایت، و ورودی دستگاه  $i$  ام برابر  $a_i = i$  و جایزه‌ی آن برابر  $b_i = (i \oplus (i - 1))$  باشد، اگر ارشیا در ابتدا ۹۱۶۷۱۵۳۴۰۱۳۰۷۲۲۵۹۰۱ ژتون داشته باشد، بیش‌ترین جایزه‌ی قابل کسب توسط او برابر چند کیلو طلا به پیمان‌های  $\Delta$  است؟

پاسخ شما: .....

## ● بخش سوم (۳۴ نمره)

فرض کنید تعداد دستگاه‌های شهربازی برابر  $n = 10^5$ ، ورودی دستگاه  $i$  ام برابر  $a_i = 2^{i-1}$  و جایزه‌ی آن برابر  $b_i$  باشد ( $b_i \leq 5 \times 10^5$ )، اگر ارشیا در ابتدا  $k$  ژتون داشته باشد ( $k$  یک عدد  $10^6$  رقمی است)، بیش‌ترین جایزه‌ی قابل کسب توسط او برابر چند کیلو طلا به پیمان‌هی  $\Delta$  است؟ (داخل فایل *items.txt* در خط اول ورودی عدد  $k$  و در خط دوم ورودی مقادیر آرایه‌ی  $b$  به ترتیب داده شده‌اند)

پاسخ شما: .....

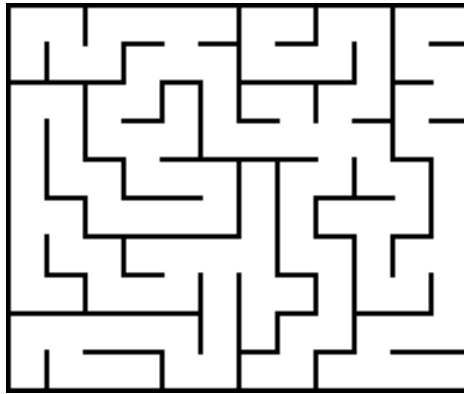


مرحله‌ی سوم سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر  
۱۹ تیر ۱۴۰۲  
آزمون روز دوم

Maze

ماز

یک ماز یک جدول با  $n$  سطر و  $m$  ستون است که هر مربع واحد یک خانه‌ی ماز است. بین هر دو خانه می‌تواند یک دیوار وجود داشته باشد. دیوارهای ماز طوری چیده شده‌اند که بین هر دو خانه‌ی ماز دقیقاً یک مسیر وجود دارد. یک ماز بسته مازی است که هیچ ورودی و خروجی‌ای ندارد.



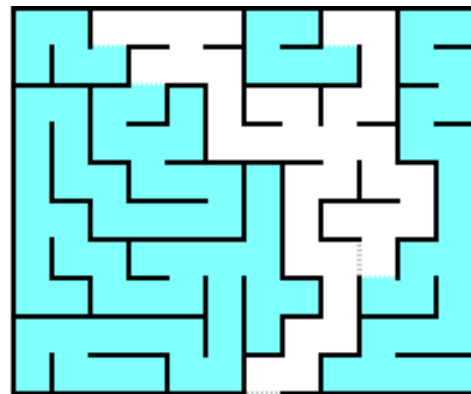
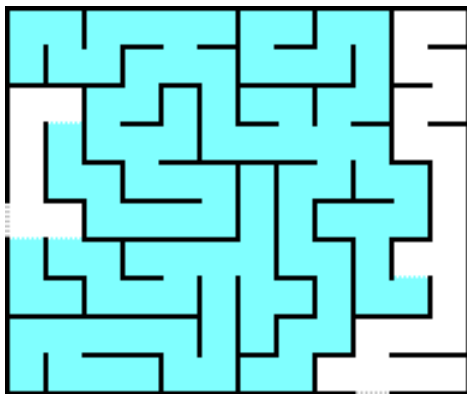
یک ماز بسته

ارشیا یک ماز سه بعدی دارد. ماز سه بعدی به شکل یک مکعب مستطیل با ارتفاع  $h$  و سطح مقطع  $n$  در  $m$  است. هر مکعب واحد از ماز یک خانه ماز نامیده می‌شود. صفحه بین هر دو خانه می‌تواند مسدود باشد. دیوارهای بین خانه‌ها طوری قرار دارند که بین هر دو خانه دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

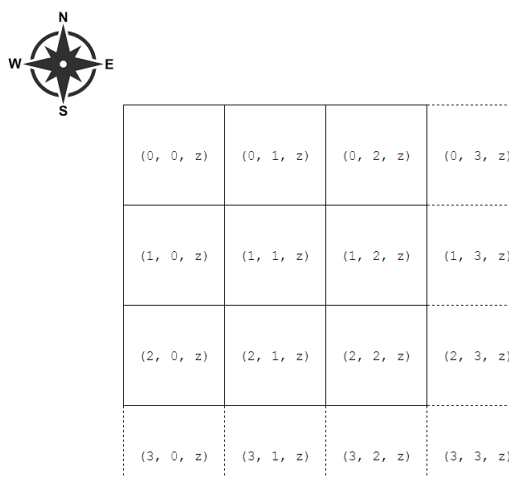
مکعب ارشیا پر از آب است. یعنی تمام خانه‌های ماز پر از آب هستند. ارشیا می‌خواهد آب درون مکعبش را خالی کند. او نمی‌تواند مکعب را جا به جا کند یا بچرخاند.

ارشیا باید بعضی از دیوارهای بین دو خانه‌ی مجاور در ماز یا بین یک خانه و بیرون ماز را باز کند تا آب درون ماز بتواند از آن خارج شود. ارشیا زمانی راضی می‌شود که هیچ خانه‌ی جدول پر از آب نباشد.

در هر یک از جدول‌های زیر یک نمونه دو بعدی نمایش داده شده است. در هر نمونه یک دیوار عمودی و یک دیوار افقی حذف شده که با نقطه چین نشان داده شده‌اند. خانه‌های رنگی نشان‌دهنده خانه‌هایی هستند که پر از آب باقی می‌مانند.



دقت کنید که در دنیای واقعی ممکن است مقداری آب در خانه‌های سفید باقی بماند، اما ارشیا فقط به خانه‌های پر از آب اهمیت می‌دهد. ارشیا می‌خواهد با حذف کمترین تعداد دیواره به هدفش برسد. او برای محاسبه این مقدار به کمک شما نیاز دارد. قاعده‌ی مکعب مستطیل موازی سطح زمین قرار دارد. و اضلاع قاعده موازی محورهای مختصات هستند. هر یک از خانه‌های مکعب مستطیل را با یک سه‌تایی مرتب  $(x, y, z)$  توصیف می‌کنیم.  $0 \leq x < n, 0 \leq y < m, 0 \leq z < h$ . جهت مثبت  $x$  به سمت جنوب، جهت مثبت  $y$  به سمت شرق و جهت مثبت  $z$  به سمت پایین است. در تصویر زیر مثالی از نحوه‌ی مختصات‌دهی برای یک صفحه با مولفه‌های  $z$  برابر داده شده‌است.



ارشیا در ابتدا مختصات همه خانه‌ها را می‌نویسد. سپس این مختصات‌ها را به ترتیب کتابخانه‌ای<sup>۱</sup> مرتب می‌کند. به عنوان مثال برای  $n, m, h = 2$  ترتیب کتابخانه‌ای  $\langle (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \rangle$  است.

سپس ارشیا در خط  $i$ -ام از  $n \times m \times h$  خط ورودی، دیواره‌های دور خانه‌ی  $i$ -ام از ترتیب را توصیف می‌کند.

توصیف دیواره‌های دور هر خانه یک رشته به طول ۶ از 0 و 1 است.

۱. بیت اول 1 است اگر و تنها اگر دیواره‌ی بالایی خانه مسدود باشد.

۲. بیت دوم 1 است اگر و تنها اگر دیواره‌ی پایینی خانه مسدود باشد.

۳. بیت سوم 1 است اگر و تنها اگر دیواره‌ی شرقی خانه مسدود باشد.

۴. بیت چهارم 1 است اگر و تنها اگر دیواره‌ی غربی خانه مسدود باشد.

۵. بیت پنجم 1 است اگر و تنها اگر دیواره‌ی شمالی خانه مسدود باشد.

۶. بیت ششم 1 است اگر و تنها اگر دیواره‌ی جنوبی خانه مسدود باشد.

<sup>۱</sup> تایی مرتب  $(x, y, z)$  از ۳ تایی مرتب  $(i, j, k)$  کوچک‌تر است اگر و تنها اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

- $x < i$
- $y < j$  و  $x = i$
- $z < k$  و  $y = j$  و  $x = i$

## ورودی

در خط اول ورودی سه عدد  $n$  و  $m$  و  $h$  آمده اند. در  $n \times m \times h$  خط بعدی توصیفات ارشیا آمده است. سه فایل با نامهای maze-1.in ، maze-2.in و maze-3.in در اختیار شما قرار داده شده‌اند که هر یک شامل ورودی برای یک ماز است.

## خروجی

- بخش اول (۳۰ نمره)

جواب مسئله را برای نمایش دو بعدی زیر از ماز توصیف شده در فایل maze-1.in را پیدا کنید. در این ماز داریم  $m = 1$ .

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

در این تصویر سمت راست جهت جنوب و سمت بالا جهت بالای ماز است. اعداد نوشته شده درون ماز برای درک بهتر از ترتیب خانه‌ها در فایل ورودی است و تاثیری در مسئله ندارد. اگر جواب  $x$  باشد،  $x^{42}$  را به پیمانه‌ی  $\Delta$  چاپ کنید.

پاسخ شما: .....

## ● بخش دوم (۳۰ نمره)

جواب مسئله برای ماز درون فایل maze-2.in را پیدا کنید. در این ماز داریم  $m = 1$ .

اگر جواب  $x$  باشد،  $x^{42}$  را به پیمانه‌ی  $\Delta$  چاپ کنید.

پاسخ شما: .....

## ● بخش سوم (۴۰ نمره)

جواب مسئله برای ماز درون فایل maze-3.in را پیدا کنید.

اگر جواب  $x$  باشد،  $x^{42}$  را به پیمانه‌ی  $\Delta$  چاپ کنید.

پاسخ شما: .....