



مرحله ی سوم سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر  
۱۸ تیر ۱۴۰۲  
آزمون روز اول

Cheat

## تقلب

آریا که مهلت کمی تا ددلاین ارسال تمرین هایش دارد، متاسفانه کد یکی از دوستانش به نام مبین را کپی کرده و به عنوان تمرین خود ارسال کرده است. می‌دانیم که در خروجی کدهای مبین تعداد زیادی «لوزی زیبا» وجود دارد. در این سوال به شما سه خروجی از کد آریا داده می‌شود و شما باید تعداد «لوزی‌های زیبا» را در آن بشمارید.

در هر خروجی به شما یک جدول از اعداد حدکثر  $10^5$  داده می‌شود. یک لوزی با انتخاب ۴ خانه در جدول که شکل هندسی مرکز آن‌ها مشابه یک لوزی باشد تشکیل می‌شود. هنگامی به یک لوزی «زیبا» می‌گوییم که قطرهایش موازی ضلع‌های جدول و خانه‌های واقع در مسیر هر یک از ۴ خانه راسی آن (راس بالا، راس راست، راس چپ و راس پایین) تا مرکز لوزی (که یک خانه هم‌ستون راس بالا و راس پایینی و هم‌سطر راس چپ و راس راست است) یک مسیر با اعداد نانزولی باشد.

به عبارت دیگر چهار خانه مختلف از جدول تشکیل یک لوزی می‌دهند اگر هر سه شرط زیر را داشته باشند:

- ۱ - قطر های لوزی موازی اضلاع جدول باشند (یا به عبارتی، دو خانه در یک ستون و دو خانه در یک سطر باشند).
  - ۲ - آن چهار خانه در جدول تشکیل یک لوزی بدهند، یعنی فاصله خانه چپ و بالایی، با فاصله خانه چپ و پایینی، با فاصله خانه راستی و بالایی، و فاصله خانه پایینی و راستی، همگی برابر باشد.
  - ۳ - اگر اعداد روی کوتاه‌ترین مسیر هر یک از چهار خانه تا مرکز لوزی (که هم‌سطر چپ و راستی و هم‌ستون بالایی و پایینی است) را در نظر بگیریم تشکیل یک دنباله‌ی نانزولی بدهند.
- همچنین دو لوزی متفاوت اگر مجموعه چهار خانه گوشه آن‌ها متفاوت باشد.
- در سطر اول هر فایل ورودی  $n$  آمده که نشان می‌دهد جدول یک مربع  $n$  در  $n$  است.

## خروجی

- بخش اول (۳۱ نمره)

باقی‌مانده تعداد لوزی‌های زیبای جدول `input1.txt` به توان ۱۰ را بر  $\Delta$  خروجی دهید.

پاسخ شما: .....

- بخش دوم (۳۴ نمره)

باقی‌مانده تعداد لوزی‌های زیبای جدول `input2.txt` به توان ۱۰ را بر  $\Delta$  خروجی دهید.

پاسخ شما: .....

- بخش سوم (۳۵ نمره)

باقی‌مانده تعداد لوزی‌های زیبای جدول `input3.txt` را بر  $\Delta$  خروجی دهید.

پاسخ شما: .....



مرحله‌ی سوم سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر  
۱۸ تیر ۱۴۰۲  
آزمون روز اول

Davinci

## داوینچی

لئوناردو داوینچی وارد دنیای علوم کامپیوتر شده است و روی آرایه‌ها کار می‌کند. او در جهت زیبا کردن آرایه، حرکت طلایی زیر را روی آن انجام می‌دهد.

- در یک حرکت طلایی دو عدد  $x, x + 1$  را به همین ترتیب انتخاب می‌کند، سپس آن دو را با عدد  $x + 2$  جایگزین می‌کند. دقت کنید که پس از حرکت طلایی تعداد اعضای آرایه منهای یک می‌شود و اعضا دوباره کنار هم قرار می‌گیرند.

داوینچی به یک آرایه می‌گوید طلایی، اگر با دنباله‌ای از حرکات طلایی بتوان به تنها یک عدد رسید. همچنین زیبایی یک آرایه طلایی را مقدار آن عدد نهایی تعریف می‌کند. او اثبات کرده است که اگر یک آرایه طلایی باشد، زیبایی آن یکتا است. به داوینچی کمک کنید و سوالات زیر که در رابطه با آرایه‌های طلایی هستند را حل کنید!

برای مثال اگر از آرایه‌ی  $\langle 3, 2, 3 \rangle$  شروع کنیم و روی دو عضو آخر آن حرکت طلایی انجام دهیم به  $\langle 3, 4 \rangle$  تبدیل می‌شود و نهایتاً اگر روی این دو عدد حرکت انجام بدهیم به  $\langle 5 \rangle$  تبدیل می‌شود. پس آرایه‌ی اولیه آرایه‌ای طلایی با زیبایی 5 بود. اما آرایه‌ی  $\langle 3, 3, 2, 4 \rangle$  طلایی نیست چون روی هیچ دو عضو متوالی نمی‌توان حرکت طلایی انجام داد.

## ورودی

در فایل `array.txt` یک آرایه‌ی طلایی به سائز  $10^5$  در یک خط آمده است. تضمین داده می‌شود اعضای این آرایه عددی در بازه‌ی 1 تا  $10^9$  هستند و با دنباله‌ای از حرکات طلایی می‌توان به تنها یک عدد رسید.

## خروجی

- بخش اول (۱۱ نمره)

زیبایی آرایه‌ی ۲۰ تایی زیر چقدر است؟

45, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 46, 47, 47, 48, 45, 46, 44, 45, 47, 50, 53

پاسخ شما: .....

- بخش دوم (۲۳ نمره)

زیبایی آرایه‌ای که در فایل آمده است به پیمانگی  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

## ● بخش سوم (۳۴ نمره)

تعداد آرایه‌های طلائی به طول ۴۰۲ که اعضایشان عددی در بازه‌ی ۱ تا ۱۴۰۲ باشد به پیمان‌هی  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

## ● بخش چهارم (۳۲ نمره)

تعداد جایگشت‌های طلائی آرایه‌ای که در فایل آمده است به پیمان‌هی  $\Delta$  چقدر است؟ دو عدد برابر در آرایه را یکسان در نظر می‌گیریم، و برای ترتیب آنها تمایز قائل نمی‌شویم.

پاسخ شما: .....



مرحله ی سوم سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر  
۱۸ تیر ۱۴۰۲  
آزمون روز اول

GCD

ب.م.م

به یک مجموعه از اعداد صحیح  $1$  تا  $n$  خوب گفته می‌شود اگر و تنها اگر ب.م.م اعضای آن برابر  $1$  نباشد. همچنین مجموعه تهی نیز یک مجموعه خوب است.

آشمنز یک مجموعه  $S$  در اختیار دارد که در ابتدا تهی است. هر روز مشتلی یک عدد رندوم  $1 \leq x \leq n$  که  $x \notin S$  انتخاب کرده و به آشمنز می‌دهد و آشمنز هم عدد  $x$  را به مجموعه  $S$  اضافه می‌کند. می‌دانیم اگر بعد از یک مرحله مجموعه  $S$  دیگر خوب نباشد، آشمنز خیلی ناراحت می‌شود. به همین دلیل مشتلی هر روز عدد  $x$  را از بین اعدادی که آشمنز را ناراحت نمی‌کنند به صورت تصادفی و با احتمال برابر انتخاب می‌کند. زمانی که عدد  $x$  که  $x \notin S$  وجود نداشته باشد که با اضافه کردن آن آشمنز ناراحت نشود، عملیات را متوقف می‌کند.

حال شما به عنوان یک المپیاد کامپیوتری باید امید ریاضی تعداد اعضای مجموعه  $S$  را پس از پایان عملیات‌های مشتلی محاسبه کنید. می‌توان نشان داد جواب به صورت یک کسر ساده‌شده‌ی  $\frac{P}{Q}$  است. شما باید مقدار  $P \cdot Q^{-1}$  به پیمانه  $\Delta$  را محاسبه کنید.

به عنوان مثال فرض کنید مقدار  $n$  برابر  $5$  است. در روز اول مجموعه  $S$  تهی است و مشتلی می‌تواند هر کدام از اعداد  $2$  تا  $5$  را به احتمال  $\frac{1}{4}$  انتخاب کند. به احتمال  $\frac{2}{4}$  عدد انتخاب شده  $3$  یا  $5$  است و روز بعد مشتلی نمیتواند عدد دیگری اضافه کند که نسبت به  $3$  یا  $5$  اول نباشد. در نتیجه در این حالت عملیات مشتلی پس از  $1$  روز به پایان می‌رسد. به احتمال  $\frac{2}{4}$  یکی از اعداد  $2$  یا  $4$  انتخاب شده و در روز بعد هم مشتلی عدد دیگر را انتخاب میکند. پس به احتمال  $\frac{2}{4}$  اندازه مجموعه نهایی برابر  $1$  و به احتمال  $\frac{2}{4}$  اندازه مجموعه نهایی برابر  $2$  است. در نتیجه جواب برابر است با  $\frac{3}{2}$ .

### خروجی

- بخش اول (۲۱ نمره)

جواب سوال را به ازای  $n = 15$  به پیمانه  $\Delta$  خروجی دهید.

پاسخ شما: .....

- بخش دوم (۳۱ نمره)

جواب سوال را به ازای  $n = 500$  به پیمانه  $\Delta$  خروجی دهید.

پاسخ شما: .....

- بخش سوم (۲۴ نمره)

جواب سوال را به ازای  $n = 5\ 000$  به پیمانه  $\Delta$  خروجی دهید.

پاسخ شما: .....

- بخش چهارم (۲۴ نمره)

جواب سوال را به ازای  $n = 3\ 000\ 000$  به پیمانه  $\Delta$  خروجی دهید.

پاسخ شما: .....