



مرحله‌ی سوم سی و دومین دوره المپیاد کامپیوتر
۲۵ تیر ۱۴۰۱
آزمون روز اول

Pashe

پشه (Pashe)

با شروع تابستان جمعیت پشه‌ها زیاد شده است.

آشمز و کشی در یک اتاق با k پشه گیر افتاده‌اند. در یک اتفاق نادر همه پشه‌ها روی دست کشی نشستند. اگر دست کشی را به شکل یک جدول 1 در n در نظر بگیریم، هر پشه دقیقاً روی یکی از خانه‌های جدول نشسته است و هیچ دو پشه ای روی یک خانه نشسته‌اند. ناگهان کشی با یک ضربه‌ی مگس‌کش همه پشه‌ها را می‌کشد. در این حین آشمز به فکر فرو می‌رود. کمترین طول ممکن برای مگس‌کش که با آن می‌توانستیم تمام پشه‌ها را با یک ضربه بکشیم چیست؟ اما چون مکان دقیق پشه‌ها را نمی‌دانست، تصمیم گرفت به ازای هر یک از $\binom{n}{k}$ حالت مختلف نشستن پشه‌ها، کمترین طول ممکن برای مگس‌کش را محاسبه کند و مجموع این مقادیر را $f(n, k)$ می‌نامد.

به عنوان مثال:



اگر n برابر ۶ و k برابر ۳ باشد و پشه‌ها روی خانه‌های دوم، سوم و پنجم نشسته باشند کمترین طول لازم برای مگس‌کش ۴ است.

خروجی

• بخش اول (۲۵ نمره)

باقی‌مانده مقدار $f(10, 9)^{10}$ بر Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش دوم (۲۵ نمره)

باقی‌مانده مقدار $f(20, 10)^2$ بر Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش سوم (۲۵ نمره)

باقی‌مانده مقدار $f(2022, 1401)$ بر Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش چهارم (۲۵ نمره)

باقی‌مانده مقدار $f(1401401, 424242)$ بر Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:



مرحله‌ی سوم سی و دومین دوره المپیاد کامپیوتر
۲۵ تیر ۱۴۰۱
آزمون روز اول

Ali Daei II

علی دایی ۲ (ali-daei-2)

علی دایی پس از یاد گرفتن علوم کامپیوتر، می‌خواهد از مفاهیم آن در مربی‌گری فوتبال استفاده کند. او یک گراف جهت‌دار n راسی دارد که راس‌های آن از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. در آن راس z به i یال جهت‌دار دارد اگر و فقط اگر عدد $1 < k$ وجود داشته باشد به طوری که $z = \lfloor \frac{i}{k} \rfloor$.
علی دایی می‌خواهد تعدادی فوتبال‌بست انتخاب کند و به هرکدام یک مسیر جهت‌دار موجود در گراف را برای تمرین بدهد تا روی آن مسیر روپایی بزنند، و حتماً هر یال این گراف توسط دقیقاً یک فوتبال‌بست پیموده شود.
 $f(n)$ را برابر حداقل تعداد فوتبال‌بست‌های مورد نیاز جهت پوشاندن یال‌های این گراف می‌نامیم.

خروجی

• بخش اول (۳۳ نمره)

باقی‌مانده مقدار $f(50)^2$ بر Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش دوم (۳۳ نمره)

باقی‌مانده مقدار $f(10000)^3$ بر Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

• بخش سوم (۳۴ نمره)

باقی‌مانده مقدار

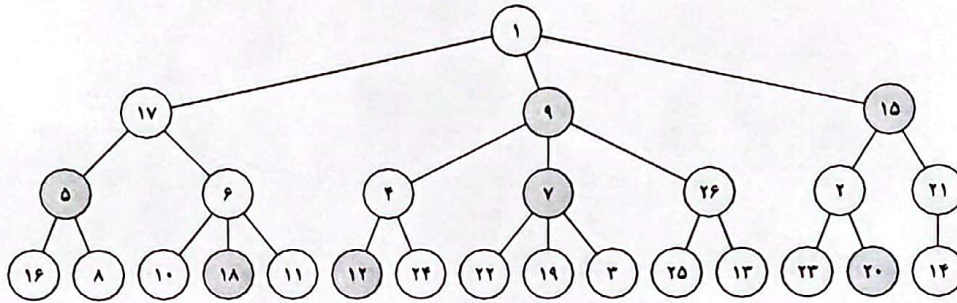
$$\sum_{1 \leq i \leq \dots} f(i)$$

بر Δ را خروجی دهید.

پاسخ شما:

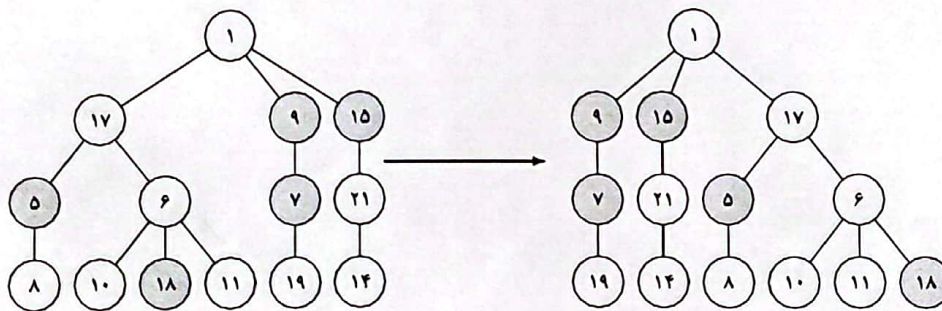


یک درخت ریشه‌دار داریم که ریشه‌ی آن راس ۱ است. به تعدادی از رئوس این درخت «راس کامکار» می‌گوییم. می‌خواهیم از بین بچه‌های هرکدام از راس‌های کامکار دقیقاً یکی از آن‌ها را انتخاب کرده و کل زیردرخت بقیه‌ی بچه‌های آن را از درخت حذف کنیم. سپس بچه‌های هرکدام از رئوس درختی که پس از انجام این عملیات به ازای تمام رئوس کامکار درخت باقی می‌مانند (در درخت حاصل، هر راس کامکار در درخت اولیه [به شرط برگ نبودن] دقیقاً یک بچه دارد) را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و دنباله‌ی پیش‌نویس آن را می‌نویسیم. برای فهم بیشتر به مثال زیر توجه کنید:



در این شکل، رئوس تیره همان رئوس کامکار هستند؛ اگر برای راس شماره‌ی ۹، راس شماره‌ی ۲۶ را انتخاب کنیم، کل زیردرخت راس‌های ۴ و ۷ از بین خواهد رفت. توجه کنید که در این صورت دیگر نیازی نیست از بین بچه‌های راس شماره‌ی ۷ یکی را انتخاب کنیم، زیرا حذف شده است!

برای مثال یکی از درختانی که در نهایت می‌توان به آن رسید، شکل زیر است که با انتخاب رئوس (۷, ۸, ۱۹, ۲۱) و حذف زیردرخت رئوس (۲, ۳, ۴, ۱۶, ۲۲, ۲۳) درست شده است که پس از مرتب کردن بچه‌های هر راس و نوشتن دنباله‌ی پیش‌نویس آن، به دنباله‌ی (۱, ۹, ۷, ۱۹, ۱۵, ۲۱, ۱۴, ۱۷, ۵, ۸, ۶, ۱۰, ۱۱, ۱۸) می‌رسیم و گراف آن نیز به شکل زیر در می‌آید:



ورودی

یال‌های درخت ۱۴۰۱۴۰۱ راسی T که ۲۰۲۰۲۲ راس کامکار دارد در یک فایل به نام `tree.in` به شما داده شده است. در خط i ام از ۱۴۰۱۴۰۰ خط اول، دو راس u_i و v_i که دو سر یال i ام درخت هستند آمده است و در ۲۰۲۰۲۲ خط بعدی، شماره‌ی راس‌های کامکار درخت نوشته شده‌اند.

خروجی

• بخش اول (۲۵ نمره)

یک درخت دودویی کامل^۱ به ارتفاع ۱۴۰۱ داریم که راس‌های آن از بالا به پایین و در هر ارتفاع از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. اگر راس‌های با شماره‌ی زوج در این درخت، راس‌های کامکار باشند تعداد دنباله‌های مختلف که می‌توان به آن‌ها رسید به پیمانه‌ی Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

• بخش دوم (۲۵ نمره)

بین تمام دنباله‌هایی که از روی درخت T می‌توان ساخت، کوچک‌ترین آن‌ها را بر حسب ترتیب لغت‌نامه‌ای^۲ یادداشت می‌کنیم. اگر عدد ۱۴۰۱ ام این دنباله برابر u باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم u^3 به پیمانه‌ی Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

• بخش سوم (۲۵ نمره)

تعداد دنباله‌های مختلفی که از روی درخت T می‌توان ساخت به پیمانه‌ی Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

• بخش چهارم (۲۵ نمره)

تمام دنباله‌های مختلفی که از روی درخت T می‌توان ساخت را پشت سر هم نوشته‌ایم و به دنباله‌ای به طول k رسیده‌ایم. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k^Δ بر Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

^۱ درختی که هرکدام از راس‌های ارتفاع ۱ تا ۱۴۰۰ در آن دقیقاً دو فرزند دارند و راس‌های ارتفاع ۱۴۰۱ برگ‌های درخت هستند.
^۲ در این نوع مقایسه، هر دو رشته (دنباله) بر حسب اولین عضو غیریکسانشان مقایسه می‌شوند. برای مثال دنباله‌ی ۴،۲،۳،۱ از دنباله‌ی ۱،۴،۳،۱ کوچک‌تر است؛ زیرا اولین عضو غیرمشترک این دو دنباله، عضو سوم آن‌هاست که در دنباله‌ی اول عددی کوچک‌تر است.