



مرحله‌ی سوم سی و دومین دوره المپیاد کامپیوتر
۲۶ تیر ۱۴۰۱
آزمون روز دوم

Panji

پنجی (panji)

روزی مجید در حال قدم‌زنی در دانشگاه بود که ناگهان به عمو برخورد می‌کند:
مجید کاملاً ناگهانی رو به عمو می‌کند و به او می‌گوید: «یک عدد از ۱ تا ۱۰ انتخاب کن.»
عمو در پاسخ به او می‌گوید: «امیدوارم از انتخابم پشیمان نشوم. انتخاب من عدد شانسم است؛ ۱۷!»
مجید لبخندی بر لب می‌آورد و سپس با صورتی کاملاً جدی به او می‌گوید: «خوب است! پس بیا فرض کنیم انتخابت ۵ بوده و با هم یک بازی کنیم...»

مجید در ادامه بازی را برای عمو توضیح داد؛ بازی از این قرار است که عدد n روی کاغذ نوشته شده و عمو در هر مرحله می‌تواند یکی از عملیات‌های زیر را بر روی عدد نوشته شده اعمال کند:

- عدد نوشته شده را بر ۵ تقسیم کنیم و کف بگیریم.
- عدد نوشته شده را ۵ واحد اضافه کنیم.

کمترین تعداد مرحله که طول می‌کشد تا با عملیات‌های مذکور بتوان عدد n را به عدد ۲۰۲۲ رساند را $safar(n)$ می‌نامیم؛ برای مثال $safar(7) = 403$ برابر $safar(50403)$ برابر ۴ و $safar(2022)$ برابر ۰ است. برای رساندن عدد ۵۰۴۰۳ به ۲۰۲۲ کفایست به شکل زیر عمل کنیم:

$$50403 \rightarrow 10080 \rightarrow 10085 \rightarrow 2017 \rightarrow 2022$$

خروجی

- بخش اول (۳۳ نمره)

باقی مانده‌ی تقسیم مقدار $\sum_{n=1}^{10^6} safar(n)$ بر Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

- بخش دوم (۳۳ نمره)

فرض کنید مقدار $safar(10^{12})$ برابر k باشد. باقی مانده‌ی تقسیم عدد k^4 بر Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

- بخش سوم (۳۴ نمره)

باقی مانده‌ی تقسیم مقدار $\sum_{n=1}^{10^{18}} safar(n)$ بر Δ چقدر است؟

پاسخ شما:



مرحله‌ی سوم سی و دومین دوره المپیاد کامپیوتر
۲۶ تیر ۱۴۰۱
آزمون روز دوم

Limited

محدود شده (limited)

ارشیا با محدودیت‌های زیادی مواجه شده و تنها برخی از جایگشت‌ها می‌توانند به دانش برسند. ارشیا در هر بخش از این سوال یک عدد n دارد که طول جایگشت مدنظر را مشخص می‌کند و برای هر یک از جایگاه‌های 1 تا n از جایگشت، یک مقدار حداقل و یک مقدار حداکثر مشخص دارد. به دنباله‌هایی دادرسی می‌گوییم که علاوه بر شرط جایگشت بودن (دقیقاً یک بار حضور اعداد طبیعی 1 تا n در آن)، اعداد موجود در جایگاه‌های آن، از محدودیت گفته شده تبعیت کند. شما باید در هر بخش از سوال به ارشیا کمک کنید و تعداد دنباله‌های دادرسی را پیدا کنید. برای مثال اگر n برابر 3 باشد و هیچ محدودیت دیگری نباشد (یعنی محدودیت حداقل همه‌ی جایگاه‌ها برابر 1 و محدودیت حداکثر همه‌ی جایگاه‌ها برابر 3 باشد) 6 دنباله‌ی دادرسی داریم؛ اما اگر عنصر در جایگاه 1 حداقل 2 باشد و عنصر جایگاه 3 حداکثر 2 باشد، جایگشت‌های دادرسی بدین شکل خواهند بود:

$$\langle 2, 3, 1 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle, \langle 3, 2, 1 \rangle$$

ورودی

یک جایگشت 100 تایی داریم که محدودیت حداقل و حداکثر مقدار جایگاه‌های آن در فایل `limited.txt` قرار گرفته است؛ این فایل در 100 خط تنظیم شده است که هر خط آن حاوی دو تا عدد است که عدد اول آن حداقل مقدار جایگشت در جایگاه متناظر است و عدد دوم حداکثر مقدار جایگشت در جایگاه متناظر است. توجه داشته باشید که تنها 20 خانه از آرایه هستند که محدودیت حداکثر مقدار آن‌ها برابر با 100 نیست!

خروجی

• بخش اول (۳۳ نمره)

فرض کنید n برابر ۱۱ باشد و محدودیت حداقل مقدار جایگاه‌ها به ترتیب برابر $(۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱)$ و محدودیت حداکثر مقدار جایگاه‌ها به ترتیب برابر $(۵, ۱۱, ۱۰, ۸, ۴, ۷, ۱۱, ۹, ۷, ۱۰, ۱۱)$ باشد. اگر تعداد جایگشت‌های دارس برابر k باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $k^۴$ بر Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

• بخش دوم (۳۳ نمره)

فرض کنید n برابر ۱۰۰ باشد و محدودیت حداقل مقدار جایگاه‌ها برابر محدودیت‌های درون فایل `limited.txt` باشد و محدودیتی برای حداکثر مقدار جایگاه‌ها نداشته باشیم! در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد جایگشت‌های دارس بر Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

• بخش سوم (۳۴ نمره)

فرض کنید n برابر ۱۰۰ باشد و تمام محدودیت‌ها برابر محدودیت‌های درون فایل `limited.txt` باشند. در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد جایگشت‌های دارس بر Δ چقدر است؟ توجه کنید در فایل ورودی تنها ۲۰ تا مقدار کران بالا (حداکثر) داریم که برابر با ۱۰۰ نیستند.

پاسخ شما:



مرحله‌ی سوم سی و دومین دوره المپیاد کامپیوتر
۲۶ تیر ۱۴۰۱
آزمون روز دوم

Grid Path

مسیر شبکه (grid-path)

یک جدول $n \times m$ داریم که سطرهاى آن از بالا به پایین و ستون‌های آن از چپ به راست شماره‌گذاری شده است و در هر خانه‌ی آن یک عدد طبیعی قرار دارد. از یک خانه‌ی دلخواه شروع می‌کنیم و هر مرحله به یکی از خانه‌های مجاور دیده‌نشده‌ی خود می‌رویم و اعداد خانه‌هایی که رویشان می‌رویم را به ترتیب دیدن یادداشت می‌کنیم. به دنباله‌ای از خانه‌های مجاور که اعداد نوشته شده‌ی آن‌ها به صورت دنباله‌ای حسابی درآیند، یک «دنباله‌ی شکرى» می‌گوییم؛ هر خانه به تنهایی یک دنباله‌ی شکرى است. برای فهم بیشتر به مثال زیر توجه کنید:

۱۹	۳۵	۳۵	۳۸	۱	۴۰	۹	۱۲	۳۹	۲
۳۸	۴۷	۱	۳	۵	۳۷	۴۴	۴۳	۴۹	۲۱
۳۷	۱۱	۴۹	۴۳	۷	۴۲	۳۱	۳۴	۴۰	۲۴
۸	۲۵	۲۲	۱۱	۹	۴	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷
۲۳	۳۹	۱۷	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۱۷	۵۱	۲۹
۱۲	۹	۳۲	۳	۴۹	۴۳	۴۵	۴۷	۴۹	۳۱
۲۱	۳۷	۱۷	۱۲	۳۲	۴۱	۳۹	۳۷	۳۵	۳۳
۵	۱۶	۵۰	۲۶	۶	۵	۴۰	۲۵	۳۲	۸
۲۶	۱۲	۴۹	۳	۴۵	۴۰	۱۹	۱۵	۶	۴۶
۴۱	۲۸	۴۱	۱۵	۳۲	۷	۲۲	۴۳	۱۰	۶

در شکل بالا، اگر خانه‌های مجاور هرکس برابر مجاورهای ضلعی‌اش باشد مسیر خاکستری رنگ یک دنباله‌ی شکرى از خانه‌ها می‌شود که دنباله‌ی مختصات خانه‌های آن به ترتیب برابر دنباله‌ی زیر است:

$$\langle (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (4, 4), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), (5, 10), (6, 10), (7, 10), (7, 9), (7, 8), (7, 7), (7, 6), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (5, 9) \rangle$$

ورودی

اعداد یک جدول 2022×1401 در یک فایل به نام grid.txt به شما داده شده است. این فایل شامل ۱۴۰۱ خط می‌باشد که در خط i ام آن ۲۰۲۲ عدد قرار دارد که اعداد خانه‌های سطر i ام جدول هستند. در خانه‌های جدول ممکن است اعداد تکراری داشته باشیم؛ ولی در هیچ بلوک 3×2 ای (مستطیلی به طول ۲ و عرض ۳) بیش‌تر ۳ عدد تکراری وجود ندارد! تمام اعداد ورودی نامنفی و کمتر از 10^9 هستند.

خروجی

● بخش اول (۳۳ نمره)

فرض کنید از هر خانه تنها قادر به رفتن به یکی از دو خانه‌ی راست یا پایین آن هستیم. با این فرض، تعداد مسیرهای شکری جدول ورودی به پیمانه‌ی Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

● بخش دوم (۳۳ نمره)

فرض کنید از هر خانه تنها قادر به رفتن به خانه‌های با مقدار اکیداً بزرگ‌تر از آن هستیم. با این فرض، تعداد مسیرهای شکری جدول ورودی به پیمانه‌ی Δ چقدر است؟

پاسخ شما:

● بخش سوم (۳۴ نمره)

فرض کنید از هر خانه تنها قادر به رفتن به یکی از چهار خانه‌ی مجاور ضلعی آن هستیم. با این فرض، تعداد مسیرهای شکری جدول ورودی به پیمانه‌ی Δ چقدر است؟

پاسخ شما: