



آزمون اصلی روز دوم مرحله سوم (۱۳۹۸/۰۴/۱۹)

- مدت زمان آزمون، ۲۱۰ دقیقه است.
- برای وارد شدن به کامپیوترها از نام کاربری day2-1 و رمز عبور kalampich استفاده کنید.
- برای هر قسمت از هر سوال، مجاز به حداکثر ۳۰ ارسال به سامانه داوری هستید.
- حتما پاسخ‌هایتان را در مکان مشخص شده بر روی برگه‌ی سوال‌ها بنویسید.

مسئله‌ی یک: اتاق فرار **نمره ۳۳**

پیمان و کیوان به همراه دوستانشان به یک اتاق فرار رفته‌اند و در آخرین مرحله باید رمز قفل نهایی را بیابند. پیمان در یکی از مراحل قبلی دو کاغذ پیدا کرده است که دنباله‌های زیر را نمایش می‌دهند.

$$\begin{cases} a_1 = 987, a_2 = 654 \\ a_i = (a_{i-1} + 3 \times a_{i-2}) \bmod \Delta \quad \forall i > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 123, b_2 = 456 \\ b_i = (2 \times b_{i-1} + 5 \times b_{i-2}) \bmod \Delta \quad \forall i > 2 \end{cases}$$

همچنین روی برگه‌ی کنار قفل نوشته شده است:

«دنباله‌ی a را تا جمله‌ی n و دنباله‌ی b را تا جمله‌ی m حساب کن. پاسخ در جدول $n \times m$ مانند M است که $M_{i,j} = a_i \oplus b_j$ است. اگر به ازای هر زیر مستطیل این جدول حاصل عملگر XOR بیتی اعداد آن زیر مستطیل را حساب کنی، مجموع این اعداد به ازای همه‌ی زیرمستطیل‌های M رمز را به تو نشان می‌دهد.»
منظور از $M_{i,j}$ خانه‌ی سطر i و ستون j جدول M و \oplus عملگر XOR بیتی (یای انحصاری) است. یک زیر مستطیل از M را می‌توان به صورت (i_1, i_2, j_1, j_2) نشان داد که شامل خانه‌هایی مانند (x, y) است که

$$1 \leq i_1 \leq x \leq i_2 \leq n \text{ و } 1 \leq j_1 \leq y \leq j_2 \leq m$$

باشد. با پاسخ به سوالات زیر به کیوان، پیمان و دوستانشان کمک کنید تا رمز قفل را کشف کنند و از اتاق فرار خارج شوند.

فرض کنید رمز قفل به ازای مقادیر n و m را با $f(n, m)$ نشان می‌دهیم.

۱- الف (۱۱ نمره): باقیمانده‌ی $f(1, 10^5)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۱۱ نمره): باقیمانده‌ی $f(1000, 1000)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ج (۱۱ نمره): باقیمانده‌ی $f(10^5, 10^5)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله ی دو: زرنگی ۳۳ نمره

علی می خواهد یکی از دیوارهای اتاقش را رنگ آمیزی کند. او همچنین می خواهد برادر کوچک ترش، حامد، را هم سرگرم کند. بنابراین علی بازی «بازهرنگی» را طراحی کرده است تا با یک تیر، دو نشان بزند. در ابتدای بازی او دیوار را به تعدادی قسمت مساوی تقسیم می کند. سپس در هر مرحله از بازی، یک یا چند قسمت متوالی از دیوار انتخاب می شود و حامد آن قسمت ها را رنگ آمیزی می کند. از آن جا که حامد بسیار باهوش است، بازه ی انتخاب شده برای رنگ آمیزی در هر مرحله، باید به صورت تصادفی انتخاب شود. در غیر این صورت حامد به نقشه ی علی پی می برد و دیگر بازی را ادامه نمی دهد.

حال علی می خواهد شانس خود برای رنگ آمیزی کامل دیوار را اندازه گیری کند. او می خواهد بداند اگر بازی را تا k مرحله ادامه دهد، در چند حالت از $\binom{n(n+1)}{k}$ حالت از انتخاب بازه ها، تمام قسمت ها حداقل یک بار رنگ آمیزی می شوند؟ اگر دیوار به n قسمت تقسیم شده باشد، این عدد را با $f(n, k)$ نشان می دهیم. برای مثال مقدار $f(2, 2)$ برابر ۷ است. به علی کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۲- الف (۱۱ نمره): باقی مانده ی $f(101, 2)^2$ (به توان دو توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): باقی مانده ی $f(19, 19)$ بر Δ چند است؟

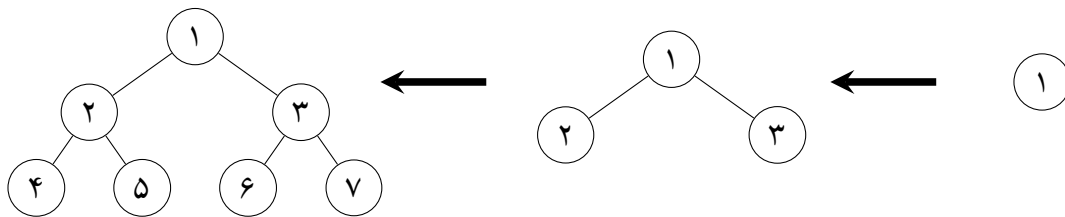
پاسخ شما:

۲- ج (۱۱ نمره): باقی مانده ی $f(101, 202)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

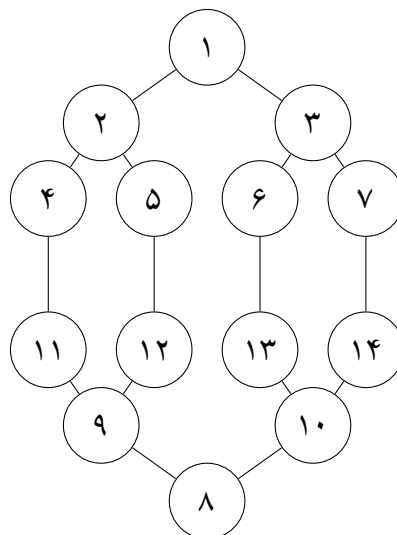
مسئله‌ی سه: پیچک ۳۴ نمره

علی به تازگی نحوه‌ی رسم درخت زندگی به ارتفاع دلخواه را یاد گرفته است. علی برای رسم درخت زندگی به ارتفاع ۱، یک راس تنها رسم می‌کند و آن را با عدد یک شماره‌گذاری می‌کند. برای رسم درخت زندگی به ارتفاع $n > 1$ او ابتدا درخت زندگی به ارتفاع $n - 1$ را رسم می‌کند. سپس برگ‌ها را به ترتیب شماره‌شان از کوچک به بزرگ گسترش می‌دهد. برای گسترش یک برگ مانند v ، علی دو راس جدید به درخت اضافه می‌کند و آن‌ها را به v وصل می‌کند و در نهایت دو راس جدید را با کوچک‌ترین عددهای طبیعی‌ای شماره‌گذاری می‌کند که هنوز به راسی در درخت اختصاص داده نشده‌اند.



درخت زندگی با ارتفاع یک، دو، و سه

علی که از خلاقیت بالایی برخوردار است، طرح جدیدی با ترکیب دو درخت زندگی ایجاد کرده است و آن را پیچک زندگی نامیده است. علی برای رسم پیچک زندگی به ارتفاع n ، ابتدا دو درخت زندگی به ارتفاع n رسم می‌کند. سپس برگ‌های با شماره‌ی برابر در دو درخت را به هم متصل می‌کند. در نهایت یکی از دو درخت زندگی اولیه را انتخاب می‌کند و عدد راس‌های آن را با تعداد راس‌های درخت زندگی به ارتفاع n جمع می‌کند. پیچک زندگی به ارتفاع n ، با T_n نشان داده می‌شود.



پیچک زندگی به ارتفاع سه

علی ارزش هر زیرگراف دلخواه را برابر با مجموع عدد راس‌های آن زیرگراف تعریف می‌کند. علی که می‌خواهد طرح جدیدش را گسترش دهد، تصمیم گرفته است تا براساس آن سوالات برنامه‌نویسی مختلفی طرح کند. او از شما خواسته است برای بررسی سختی این سوالات، آن‌ها را حل کنید. به او کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۳- الف (۱۱ نمره): اگر مجموع ارزش تمام دورهای پیچک T_4 را با C نشان دهیم، باقی‌مانده‌ی C^4 (به توان چهار توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ب (۱۱ نمره): علی زیرگراف حاصل از سه مسیر یال مجزا بین دو راس دلخواه u و v را، سه‌ور uv می‌نامد. مجموع ارزش تمام سه‌ورهای uv را قدرت زوج (u, v) می‌نامیم. باقی‌مانده‌ی مجموع قدرت تمام زوج‌های (u, v) که $u < v$ در T_6 بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ج (۱۲ نمره): باقی‌مانده‌ی تعداد مسیرهای T_8 (شامل مسیرهای تک راسی) بر Δ چند است؟ توجه کنید که اگر u و v دو راس متفاوت باشند، مسیر از u به v با برعکس همان مسیر از v به u یکسان است و نباید جداگانه محاسبه شوند.

پاسخ شما: