

شما شنگول گرگ زاده اصل و Δ شما در آزمون اصلی پنجشنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!

مسئله ی یک: دیوار رنگی رنگی ۳۳ نمره

هوشنگ به تازگی با بازی تلفن همراه «دیوار» آشنا شده است. هدف بازی تخریب دیواری است که با آجرهای رنگی ساخته شده است. دیوار را می توانیم به صورت یک جدول $n \times n$ نشان دهیم که هر خانه اش یا خالی است و یا با یک آجر رنگی پر شده است. در ابتدای بازی تمامی خانه ها، پر هستند. سطرهای این دیوار از پایین به بالا و ستون های آن از چپ به راست با اعداد ۰ تا $n - 1$ شماره گذاری شده اند. خانه ی واقع در تقاطع سطر i و ستون j را با (i, j) نشان می دهیم. رنگ آجر واقع در خانه ی (i, j) در ابتدا $a_{i,j}$ است.

دو آجر همسایه اند اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. یک مسیر آجری به دنباله ای (با طول حداقل ۱) از آجرها می گوئیم که هر دو آجر متوالی در این دنباله همسایه باشند. دو آجر x و y به هم مسیر دارند اگر و تنها اگر یک مسیر آجری وجود داشته باشد که با x شروع شود و به y ختم شود. یک مؤلفه آجری به مجموعه ای بیشین (ماکسیمال) از آجرهای هم رنگ می گوئیم که هر دو آجر در این مجموعه به یکدیگر مسیر داشته باشند. می توان دید که هر آجر عضو دقیقاً یک مؤلفه آجری است.

در هر مرحله از بازی بازیکن یکی از آجرهای موجود را انتخاب می کند. پس از آن کل مؤلفه ی آجری شامل آجر انتخاب شده حذف می شود. سپس همه ی آجرهایی که زیرشان خالی است به پایین سقوط می کنند و روی آجرهای دیگر یا پایین دیوار قرار می گیرند (یعنی در این بازی جاذبه وجود دارد). بعد از آن همه ی ستون های خالی حذف می شوند و ستون های سمت راست آن ها به چپ می آیند (ابعاد دیوار عوض میشود). بازی تا زمانی ادامه پیدا می کند که همه ی آجرهای جدول حذف شوند. اگر در یک مرحله x آجر از دیوار حذف شوند، امتیاز آن مرحله برابر با x^3 است. امتیاز کل بازی برابر با مجموع امتیاز تمام مراحل بازی است.

در ابتدای هر مرحله آجرها به ترتیب از خانه ی پایین - چپ با اعداد ۰ تا $t - 1$ (که t تعداد آجرهاست) شماره گذاری می شوند. به این صورت که شماره ی یک آجر از آجر دیگری کمتر است اگر و تنها اگر شماره ی ستونش کوچکتر باشد، یا هر دو در یک ستون باشند و شماره ی سطر آجر اول کوچکتر باشد.

شماره ی آجر واقع در خانه ی (i, j) برابر با $e_{i,j}$ است. یک نمونه از شماره گذاری آجرها در زیر آمده است:

				۱۵
	۶			۱۴
۲	۵	۹		۱۳
۱	۴	۸		۱۲
۰	۳	۷	۱۰	۱۱

هوشنگ یک المپیاد کامپیوتری است. او با روش های مخصوصی کد این بازی را به دست آورده و می خواهد رباتی بنویسد که با تقلب در این بازی رکورد جهانی آن را بشکند. او بعد از خواندن کد این بازی با تابع زیر مواجه شد:

```
int rand(int x, int m)
{
    return (123*x*x + 1234*x + 12345) % m;
}
```

هوشنگ از شما خواسته است تا در نوشتن رباتش به او کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): هوشنگ می داند که $n = 50$ و $a_{i,j} = i \times n + j + 1$ است. هم چنین اگر در مرحله i ام (با شروع از ۱)، t آجر در دیوار مانده باشد، ربات او آجر شماره ی $rand(i, t)$ را انتخاب می کند. هوشنگ می خواهد تمام حرکات رباتش را زیر نظر بگیرد. به طور دقیق تر او مجموع وضعیت مراحل بازی (از جمله مرحله ی آغازین) را می خواهد بداند. وضعیت یک مرحله برابر است با مجموع $e_{i,j} \times c_{i,j}$ برای تمام آجرهای دیوار، که $c_{i,j}$ رنگ آجر واقع در خانه ی (i, j) در آن مرحله است. باقیمانده ی تقسیم مجموع وضعیت های مراحل بازی بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): هوشنگ می داند که $n = 50$ و $a_{i,j} = rand(i \times n + j, 12)$ است. اگر در مرحله i ام (با شروع از ۱)، t آجر در دیوار مانده باشد، ربات او آجر شماره ی $rand(2500 + i, t)$ را انتخاب می کند. باقیمانده ی تقسیم امتیاز بازی ربات بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- پ (۱۱ نمره): هوشنگ می داند که $n = 6$ و $a_{i,j} = rand(i \times n + j, 4)$ است. او از شما خواسته رباتی برای او طراحی کنید که بیشترین امتیاز را کسب کند. باقیمانده ی تقسیم این بیشترین امتیاز بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله دو: تابع پرانتز ۳۳ نمره

هوشنگ به تازگی با پرانتزگذاری‌ها آشنا شده است. یک دنباله‌ی پرانتزی دنباله‌ای از '(' و ')' است. یک پرانتزگذاری حالت خاصی از دنباله‌های پرانتزی است، به این صورت که:

- () یک پرانتزگذاری است.
- اگر s یک پرانتزگذاری باشد، (s) هم یک پرانتزگذاری است.
- اگر s و t پرانتزگذاری باشند، st هم یک پرانتزگذاری است.

هوشنگ عمل «جابه‌جایی» روی یک پرانتزگذاری را اینگونه تعریف می‌کند: جابه‌جا کردن دو حرف مجاور، که اولی (سمت چپی) پرانتز بسته و دومی (سمت راستی) پرانتز باز باشد. می‌توان اثبات کرد که هر پرانتزگذاری بعد از هر عمل جابه‌جایی همچنان یک پرانتزگذاری می‌ماند.

هوشنگ ساعت‌ها این عمل را روی پرانتزگذاری‌های مختلف آزمایش کرده و دو تابع f و g را تعریف کرده است. ورودی هر دو تابع یک پرانتزگذاری است. $f(s)$ تعداد پرانتزگذاری‌های مختلفی است که پس از انجام دقیقاً یک عمل جابه‌جایی روی s می‌توان به آن‌ها رسید. $g(s)$ تعداد پرانتزگذاری‌های مختلفی است که پس از انجام تعدادی (صفر یا بیشتر) عمل جابه‌جایی روی s می‌توان به آن‌ها رسید. هوشنگ از شما خواسته به سوالات زیر درباره این توابع پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع $g(s)$ برای همه‌ی s های مختلف (پرانتزگذاری‌های مختلف) به طول ۱۴، بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع $f(s)$ برای همه‌ی s های مختلف (پرانتزگذاری‌های مختلف) به طول ۷۰، بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

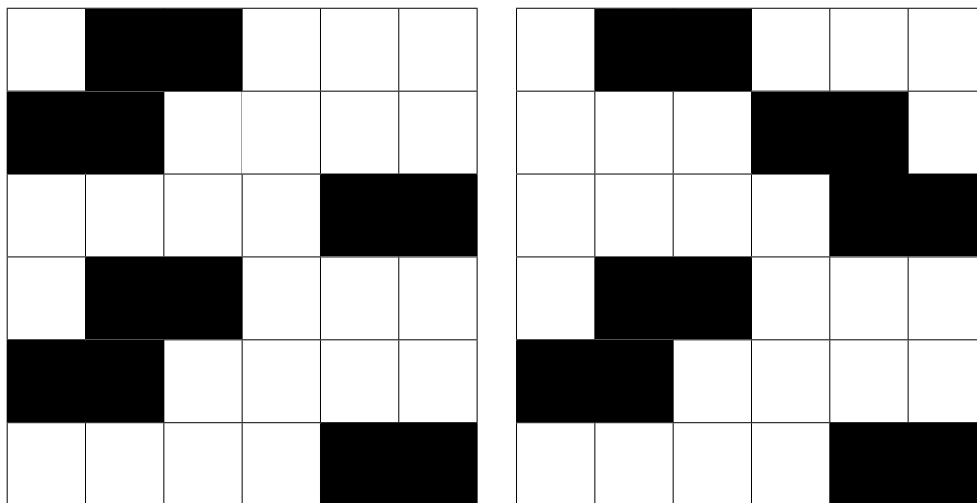
۳- پ (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع $g(s)$ برای همه‌ی s های مختلف (پرانتزگذاری‌های مختلف) به طول ۱۴۴، بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله سه: تالار اسرار ۳۴ نمره

هوشنگ تالار اسرار را کشف کرده است. این تالار از بالا به صورت یک جدول n متر در n متر است. همانطور که در افسانه ها آمده است، باسیلیسک در این تالار زندگی می کند و «هر که در چشمان او بنگرد سنگ شود». هوشنگ برای مقابله با باسیلیسک می خواهد از تعدادی قفسه ی کتاب استفاده کند. هر قفسه ی کتاب یک جدول $k \times 1$ است که به صورت افقی (در سطرها) قرار می گیرد و دقیقاً k خانه کامل از خانه های یک سطر را پر می کند. همانطور که در پیشگویی آمده باسیلیسک در پایین تالار (بعد از آخرین سطر) یعنی در پایین یکی از خانه های سطر آخر می ایستد و رو به بالا نگاه می کند. هوشنگ هم از بالای جدول (بالای اولین سطر) به پایین نگاه می کند. هوشنگ می خواهد امکان سنگ شدنش وجود نداشته باشد. او نمی داند باسیلیسک از پایین کدام خانه سطر آخر می خواهد به او نگاه کند، بنابراین می خواهد در هر سطر دقیقاً یک قفسه کتاب قرار دهد، به طوری که همه قفسه ها کاملاً درون تالار باشند و در هر ستون حداقل یک قفسه (خانه ای متعلق به یک قفسه) باشد که راه نگاه باسیلیسک را بگیرد.

در شکل زیر، مثال هایی از چینش قفسه ها در تالار به ازای $n = 6$ و $k = 2$ آمده است.



در شكا سمت راست امکان ندارد هوشنگ چشمان باسیلیسک را ببیند، چون باسیلیسک پایین هر ستونی باشد قفسه ها جلوی دیده شدنش را می گیرند.

ولی در شکل سمت چپ اگر باسیلیسک پایین و هوشنگ بالای ستون سوم (از راست) باشد هوشنگ چشمان باسیلیسک را می بیند و سنگ می شود.

هوشنگ از شما خواسته به او کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): اگر $n = 500$ و $k = 300$ باشد، هوشنگ به چند طریق می‌تواند این قفسه‌ها را قرار دهد؟
باقیمانده‌ی تقسیم این عدد بر Δ را بدست آورید.

پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): اگر $n = 100$ و $k = 23$ باشد، هوشنگ به چند طریق می‌تواند این قفسه‌ها را قرار دهد؟
باقیمانده‌ی تقسیم این عدد بر Δ را بدست آورید.

پاسخ شما:

۳- پ (۱۲ نمره): اگر $n = 5000$ و $k = 1234$ باشد، هوشنگ به چند طریق می‌تواند این قفسه‌ها را قرار دهد؟
باقیمانده‌ی تقسیم این عدد بر Δ را بدست آورید.

پاسخ شما: