

شما شنگول گرگ زاده اصل و Δ شما در آزمون اصلی چهارشنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!

مسئله یک: پارتی بازی ۳۳ نمره

n دانش پژوه برای ورود به محل آزمون مرحله سوم المپیاد کامپیوتر به ترتیب جلوی درب دانشگاه شهید رجایی صفی تشکیل داده اند. مسئولان برای نشان دادن دانش پژوهان در سایت یک صف جلوی درب سایت تشکیل داده اند که ابتدا خالی است. روند ورود دانش پژوهان به سایت این گونه است که پس از ورود به دانشگاه در صف جلوی سایت قرار می گیرند و پس از رسیدن نوبتشان به داخل سایت می روند. مسئولان برای هر دانش پژوهی که اسم رمز را بگوید پارتی بازی می کنند. مسئولان نمیدانند چه کسانی اسم رمز را می دانند، ممکن است همه آنرا بدانند. به طور دقیق تر در هر دقیقه یکی از سه اتفاق زیر می افتد:

۱. اولین نفر در صف بیرون دانشگاه در انتهای صف جلوی سایت قرار می گیرد.
 ۲. اولین نفر در صف جلوی سایت به داخل سایت می رود.
 ۳. اولین نفر در صف بیرون دانشگاه اسم رمز را می گوید و مسئولان او را با پارتی بازی به طور مستقیم و بدون وارد شدن به صف جلوی سایت به داخل سایت می فرستند.
- برای اینکه جلوی سایت زیاد شلوغ نشود، طول صف جلوی سایت هیچگاه از k نفر بیشتر نمی شود. صندلی های سایت از ۱ تا n شماره گذاری شده اند. هر نفر که وارد سایت می شود روی اولین صندلی خالی (با کمترین شماره) می نشیند. مثلاً اگر $n = ۳$ و $k = ۱$ باشد، یکی از اتفاقات ممکن این است:

۱. نفر اول صف بیرون دانشگاه (دانش پژوه شماره ۱) در انتهای صف جلوی سایت قرار می گیرد.
۲. نفر اول صف بیرون دانشگاه (دانش پژوه شماره ۲) اسم رمز را میگوید و مسئولان با پارتی بازی او را وارد سایت می کنند و او روی صندلی شماره ۱ می نشیند.
۳. نفر اول صف جلوی سایت (دانش پژوه شماره ۱) وارد سایت می شود و روی صندلی شماره ۲ می نشیند.
۴. نفر اول صف بیرون دانشگاه (دانش پژوه شماره ۳) اسم رمز را میگوید و مسئولان با پارتی بازی او را وارد سایت می کنند و او روی صندلی شماره ۳ می نشیند.

بدین ترتیب چینش دانش پژوهان در سایت $\langle ۲, ۱, ۳ \rangle$ است (یعنی روی صندلی اول دانش پژوه شماره ۲ نشسته است و ۰۰). با توجه به محدودیت های بالا و اینکه صف روبروی دانشگاه هم اکنون تشکیل شده است، چند چینش متفاوت از دانش پژوهان بر روی صندلی های سایت ممکن است به طوری که همه ی n دانش پژوه داخل سایت نشسته باشند؟

هوشنگ از مسئولان برگزاری مسابقه است و عدد فوق را f می نامد. او از شما خواسته به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): اگر $n = 100$ و $k = 1$ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم f بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): اگر $n = 11$ و $k = 4$ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم f بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- پ (۱۱ نمره): اگر $n = 100$ و $k = 17$ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم f بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی دو: عکس فی ۳۳ نمره

هوشنگ به تازگی در دبیرستان با تابع فی-اویلر، یعنی ϕ آشنا شده است. $\phi(n)$ تعداد اعداد طبیعی کوچکتر مساوی n است که نسبت به n اول اند. مثلاً $\phi(1) = 1$ و $\phi(9) = 6$ است. همچنین او می‌داند که اگر $P(n)$ مجموعه همه‌ی عوامل اول n باشد:

$$\phi(n) = n \prod_{p \in P(n)} \frac{p-1}{p}$$

هوشنگ تابع f را اینگونه تعریف می‌کند:

$$f(n) = \sum_{i \in \mathbb{N}, \phi(i)=n} i^2$$

هوشنگ از شما خواسته به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(60)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(250)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- پ (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(2350194604833600)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

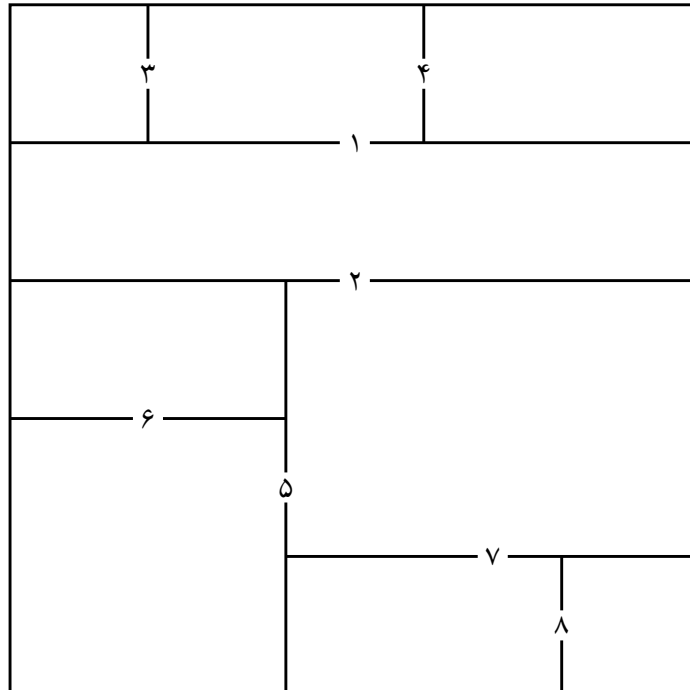
مسئله‌ی سه: خط کشی باشگاه ۳۴ نمره

آقای ش. برای تغییر نمای حیاط باشگاه دانش پژوهان جوان می‌خواهد آن را خط کشی کند. حیاط باشگاه یک مربع $(2n + 1) \times (2n + 1)$ است. آقای ش. $2n$ نقطه با فاصله‌های یکسان (۱ متر)، با گچ روی اضلاع حیاط مشخص کرده است که هیچ‌یک از این نقاط در گوشه نیست و فاصله‌ی نقاط انتها و ابتدای هر ضلع از گوشه نیز ۱ متر است. سپس او بعضی از این نقاط را پاک می‌کند. به‌طور دقیق‌تر، اگر نقاط روی ضلع سمت چپ و راست حیاط را از بالا به پایین، و نقاط روی ضلع بالا و پایین حیاط را از چپ به راست با اعداد ۱ تا $2n$ شماره گذاری کنیم، همه‌ی نقاط با شماره‌ی زوج در ضلع چپ و بالا، و همه‌ی نقاط با شماره‌ی فرد در ضلع راست و پایین پاک می‌شوند (و بقیه‌ی نقاط شماره‌ی قبلی خود را حفظ می‌کنند).

آقای ش. بقیه کار خط کشی حیاط را به هوشنگ سپرده است. هوشنگ می‌خواهد بعضی از اضلاع حیاط (از بین ۴ ضلع) را انتخاب کند و تعدادی دانش پژوه روی هر نقطه‌ی پاک نشده بر روی هر کدام از اضلاع انتخاب شده قرار دهد. پس از آن، دانش پژوهان را به ترتیب دلخواهش صدا کند. هر دانش پژوه زمانی که اسمش صدا زده شود، به سمت ضلع روبروی خود می‌رود و یک خط صاف میکشد (عمودی یا افقی)، تا زمانی که به خطی عمود در مسیر حرکتش (یا ضلع روبرو) برسد.

ابتدا هیچ خطی جز چهار ضلع حیاط وجود ندارد.

شکل زیر خط کشی حیاط باشگاه برای $n = 2$ و اینکه هوشنگ هر چهار ضلع جدول را انتخاب کند را نشان می‌دهد (عدد روی خطوط نشان دهنده ترتیب کشیده شدن آنهاست).



ترتیب صدا زده شدن دانش پژوهان در این حالت:

۱. دانش پژوه روی نقطه ۱ ضلع سمت چپ
۲. دانش پژوه روی نقطه ۲ ضلع سمت راست
۳. دانش پژوه روی نقطه ۱ ضلع بالا
۴. دانش پژوه روی نقطه ۳ ضلع بالا
۵. دانش پژوه روی نقطه ۲ ضلع پایین
۶. دانش پژوه روی نقطه ۳ ضلع سمت چپ
۷. دانش پژوه روی نقطه ۴ ضلع سمت راست
۸. دانش پژوه روی نقطه ۴ ضلع پایین

دو خط کشی (شکل) متفاوت اند اگر و تنها اگر نقطه ای از حیات باشد که در یکی رنگی شده باشد و در دیگری نه. هوشنگ محاسباتش خیلی خوب نیست و از شما خواسته به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): اگر هوشنگ اضلاع بالا و چپ را انتخاب کند، به ازای همه ی ترتیب های مختلف از این $2n$ دانش پژوه چند خط کشی (شکل) مختلف به وجود می آید؟ باقی مانده ی تقسیم این عدد بر Δ را بدست آورید.

پاسخ شما:

۱- ب (۱۱ نمره): اگر هوشنگ اضلاع بالا و چپ و راست را انتخاب کند، به ازای همه ی ترتیب های مختلف از این $3n$ دانش پژوه چند خط کشی (شکل) مختلف به وجود می آید؟ باقی مانده ی تقسیم این عدد بر Δ را بدست آورید.

پاسخ شما:

۱- پ (۱۲ نمره): اگر هوشنگ همه ی اضلاع را انتخاب کند، به ازای همه ی ترتیب های مختلف از این $4n$ دانش پژوه چند خط کشی (شکل) مختلف به وجود می آید؟ باقی مانده ی تقسیم این عدد بر Δ را بدست آورید.

پاسخ شما: