

آزمون اصلی دوم - دومین روز تابستان ۱۳۸۹

نام و نام خانوادگی: مدّت: ۱۵۰ دقیقه

شما دانش آموز شماره‌ی ۱ هستید. کد Δ ی شما برابر ۹۷۹۸۷ است.

مسئله‌ی اول: اعداد جمع! ۱۱ نمره
عدد A را خوش مقسوم‌علیه، یا به صورت خلاصه «جمع»، می‌گوییم، اگر حاصل جمع مقسوم‌علیه‌های تام (غیرخودش) آن (که این مقدار را E آن عدد می‌نامیم) برابر با خود عدد یا حتی بیش‌تر از خودش باشد! مثلاً عدد ۱۲ یک عدد جمع است، چرا که حاصل جمع مقسوم‌علیه‌های تامش برابر $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 = E(12)$ است. برای یک عدد جمع x «نسبت جمعیت» آن عدد برابر $E(x)/x$ تعریف می‌شود. مثلاً عدد جمعیت ۱۲ برابر چهار سوم است.

فرض کنید تمام اعداد جمع کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰۰ را نوشته‌ایم و آن‌ها را بر اساس نسبت جمعیت (جمعیت بالاتر، رتبه کم‌تر) مرتب کرده‌ایم. اگر دو عدد نسبت جمعیت یکسان داشتند هم، عدد کوچکتر را بهتر (رتبه کم‌تر) در نظر می‌گیریم.

پس از این مرتب‌سازی، عدد رتبه ۱۳ را V می‌نامیم. باقی‌مانده‌ی تقسیم $V^2 + V^3$ بر Δ چند است؟

جواب:

مسئله‌ی دوم: لاک‌پشت‌های عاشق! ۱۶ نمره
سه لاک‌پشت با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب در مختصات $(1024, 2010)$ و $(1381, 138)$ و $(-1381, 2010)$ (روی صفحه محورها مختصات) قرار گرفته‌اند. می‌دانیم لاک‌پشت شماره‌ی ۱، عاشق لاک‌پشت شماره‌ی ۲ است! شماره‌ی ۲ هم عاشق ۳ است و شماره‌ی ۳ عاشق شماره‌ی ۱!

هر لاک‌پشتی قصد دارد به معشوقش برسد! برای این منظور در ابتدای هر ثانیه سرش را بالا می‌گیرد و بسته به مکان معشوقش، یا همان سرجای خود و یا یکی از ۸ خانه مجاورش را به عنوان مقصدش را انتخاب می‌کند. سپس در انتهای ثانیه، سرش را پایین می‌اندازد و به مقصد خود می‌رود.

می‌دانیم یک لاک‌پشت اگر به خود مکان یا یکی از خانه‌های مجاور (مجاورت ۸ خانه‌ای) معشوق خود برسد، دیگر حرکت نمی‌کند. در غیر این صورت، از بین خانه‌های مجاورش، خانه‌ای را انتخاب می‌کند که فاصله‌ی متنه‌ن آن خانه، با خانه‌ی معشوقش (در ابتدای ثانیه که دارد نگاه می‌کند) کمینه باشد. فاصله‌ی متنه‌ن دو نقطه، قدرمطلق تفاضل یکس‌ها به‌اضافه‌ی قدرمطلق تفاضل ایگرگ‌ها است (نصف محیط کوچکترین مستطیل دربرگیرنده‌ی دو نقطه).

برای مثال در پایان ثانیه‌ی اول سه لاک‌پشت به ترتیب در مختصات $(1023, 2009)$ (اولی)، و $(-1380, 139)$ (دومی) و $(2, 2010)$ (سومی) خواهند بود.

می‌خواهیم بدانیم در پایان چندمین ثانیه، لاک‌پشت‌ها به پایداری می‌رسند (و بعد از آن دیگر هرگز هیچ‌کدامشان تکان نخواهند خورد). اگر پایداری در پایان ثانیه‌ی S رخ می‌دهد، باقی‌مانده‌ی S^6 (عدد S به‌توان ۶) بر Δ چند است؟

جواب:

