

به نام خدا

آزمون مرحله دوم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

هدیه‌ی معین..... ۲۰ امتیاز

۱- مصطفی برای جشن تولدش، معین را دعوت کرده است. معین تصمیم گرفته کادوی تولد مصطفی را خودش بسازد. به دلیل علاقه‌ی مصطفی به گراف، معین یک گراف ساده‌ی ۲۰۱۸ رأسی با تعدادی توپ (به عنوان رأس) و میله (به عنوان یال) ساخته است.

روز قبل از تولد، معین یادش می‌آید مصطفی فقط گراف‌های ساده‌ای را دوست دارد که درجه‌ی تمام رأس‌ها در آن فرد است. معین می‌خواهد با اضافه کردن تعدادی میله (یال) به گراف کاری کند که درجه‌ی تمام رأس‌ها فرد شود و همچنان گراف به صورت ساده باقی بماند.

او با بررسی گرافش متوجه شد تنها یک روش برای این کار وجود دارد! حداقل تعداد یال‌های ممکن برای گراف معین (قبل از اقدام برای اضافه کردن یال‌ها) را بیابید.

معین حریص..... ۲۰ امتیاز

۲- پس از حل مشکل تولد (در مسئله‌ی قبل)، مصطفی برای این که جشن تولد جذابی داشته باشد، یک بازی بین

خود، امیر و معین برگزار می‌کند. پیش از شروع تولد، مصطفی 17^3 عدد شکلات خریداری کرده و آن را درون یک مکعب $17 \times 17 \times 17$ چیده است (در هر خانه دقیقاً یک شکلات). شکلات واقع در سطر x ، ستون y و ارتفاع z را با (x, y, z) نشان می‌دهیم. بازی به این صورت است که در آغاز کار، امیر شکلات $(1, 1, 1)$ را خورده و بازی شروع می‌شود. سپس مصطفی، معین و امیر به نوبت بازی می‌کنند.

مصطفی در نوبت خود می‌تواند شکلات سمت راست یا سمت چپی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x + 1, y, z)$ یا $(x - 1, y, z)$ را بخورد.

معین می‌تواند شکلات جلو یا عقبی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x, y + 1, z)$ یا $(x, y - 1, z)$ را بخورد.

امیر می‌تواند شکلات بالا یا پایینی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x, y, z + 1)$ یا $(x, y, z - 1)$ را بخورد.

اگر کسی نتواند در نوبت خود شکلاتی بخورد، می‌بازد و بازی تمام می‌شود.

الف) مصطفی برای این که دوست دارد تحت هر شرایطی امیر ببازد، با معین تباری می‌کند و این دو سعی می‌کنند به نحوی بازی کنند که امیر ببازد. آیا این دو نفر می‌توانند طوری بازی کنند که امیر هرطور بازی کند بازنده باشد؟

ب) امیر که از این موضوع خبردار می‌شود، معین را راضی می‌کند که با او همکاری کند. آیا امیر و معین می‌توانند طوری بازی کنند که مصطفی هرطور بازی کند بازنده باشد؟

در جست و جوی مصطفی..... ۲۰ امتیاز

۳- مصطفی بعد از این که متوجه شد معین، دوست صمیمی او، با امیر توطئه کرده است تا او را شکست بدهد، از ناراحتی سر به بیابان می‌گذارد. n نفر از دوستان مصطفی از این موضوع مطلع می‌شوند و به دنبال او به بیابان می‌روند تا او را پیدا کنند و برگردانند.

بیابان یک زمین مسطح است (زمین از هر چهار طرف نامتناهی) که افراد می‌توانند در مختصات صحیح آن حرکت کنند. مصطفی روی یکی از این نقاط پنهان شده و به علت ناراحتی بسیار، از جایش تکان نمی‌خورد. تنها کسی او را می‌بیند که دقیقاً روی همان نقطه باشد.

این n نفر در نقاطی دلخواه از بیابان مستقر شده و هر کدام جهتی را انتخاب می‌کنند (بالا، پایین، چپ یا راست). پس از شروع، هر کدام در جهتی که انتخاب کرده حرکت می‌کند و هر ثانیه یک قدم بر می‌دارد (یک واحد حرکت می‌کند و به نقطه‌ی صحیح بعدی می‌رود).

اگر دو نفر از روبه‌رو، در یک نقطه‌ی صحیح به هم برخورد کنند، هردو جهت خود را به سمت راست خود تغییر می‌دهند (۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت) و در جهت جدید، حرکت خود را ادامه می‌دهند. دقت کنید اگر دو نفر از جهت دیگری به هم برسند یا بین دو نقطه‌ی صحیح با هم روبه‌رو شوند، از کنار هم عبور کرده و تغییر جهت نمی‌دهند.

آیا دوستان مصطفی همواره می‌توانند طوری در بیابان قرار گیرند و جهت‌های مناسبی انتخاب کنند، که حتماً مصطفی را پیدا کنند؟

احترام به پدر..... ۲۰ امتیاز

۴- پس از این که تولد مصطفی به خوبی برگزار نشد، خانواده‌ی او تصمیم گرفتند یک جشن تولد مردانه با حضور جمعی از مردان خاندان برگزار کنند. n نفر از مردان خاندان (از جمله بزرگ خاندان) در جشن شرکت کردند و به طرز جالبی پدر هر فرد حاضر در جشن (به جز بزرگ خاندان)، در تولد حضور داشت. گوییم فرد A جد فرد B است، اگر A یکی از افراد زیر باشد:

پدر B ، پدر پدر B ، پدر پدر پدر B ، ...، بزرگ خاندان

به زیرمجموعه‌ای از افراد حاضر در جشن **سلسله‌ای** گوییم، اگر از هر دو عضو زیرمجموعه، یکی جد دیگری باشد و هم‌چنین به جز بزرگ‌ترین فرد زیرمجموعه، پدر هر فرد زیرمجموعه، در زیرمجموعه باشد.

در انتهای جشن مصطفی تصمیم گرفت برای یادگاری تعداد عکس تهیه کند. او برای این کار یک عکاس آورد. بزرگ خاندان به عکاس گفت که تنها از زیرمجموعه‌های سلسله‌ای افراد حاضر در جشن، عکس بگیرد. سپس عکاس گفت که عکاسی از هر زیرمجموعه‌ی سلسله‌ای S_i ، هزینه‌ی T_i را دارد.

خاندان مصطفی بسیار خانواده دوست هستند و به پدر خود احترام می‌گذارند. بنابراین تصمیم گرفتند تعدادی عکس بگیرند، طوری که هر کس با پدر خود در دست کم دو عکس آمده باشد. مصطفی برآورد کرد کمینه‌ی هزینه‌ی ممکن برای این کار m واحد است. ثابت کنید افراد می‌توانند کار خود را با m واحد هزینه، طوری انجام دهند که از هر زیرمجموعه‌ی سلسله‌ای، صفر یا دو بار عکس گرفته شده باشد.