سوال اول: چرخش .... ۱۸ نمره

عمل **چرخش** روی جایگشتِ $P = \langle P_۱, P_۲, \dots, P_{۱۴۰۲} \rangle$ از اعداد ۱ تا ۱۴۰۲ به این صورت تعریف می‌شود که عدد طبیعیِ i را انتخاب می‌کنیم (که $۱ \leq i \leq ۱۴۰۲$) و جایگشتِ P را از جایگاهِ i اُم می‌شکنیم تا دو زیرجایگشتِ $A = \langle P_۱, P_۲, \dots, P_i \rangle$ و $B = \langle P_{i+۱}, P_{i+۲}, \dots, P_{۱۴۰۲} \rangle$ ایجاد شوند؛ سپس جایگشت P را با یکی از جایگشت‌های زیر جایگزین می‌کنیم:

- $B.A = \langle P_{i+۱}, P_{i+۲}, \dots, P_{۱۴۰۲}, P_۱, P_۲, \dots, P_i \rangle$
- $A.\bar{B} = \langle P_۱, P_۲, \dots, P_i, P_{۱۴۰۲}, P_{۱۴۰۱}, \dots, P_{i+۱} \rangle$
- $\bar{A}.B = \langle P_i, P_{i-۱}, \dots, P_۱, P_{i+۱}, P_{i+۲}, \dots, P_{۱۴۰۲} \rangle$

جایگشت آغازینی از اعداد ۱ تا ۱۴۰۲ داده شده است. هدف، **منظم کردن** جایگشت است؛ به این معنی که با استفاده از تعدادی عمل چرخش به یکی از جایگشت‌های ⟨۱۴۰۲ , ... ,۲ ,۱⟩ یا ⟨۱ , ... ,۱۴۰۱ ,۱۴۰۲⟩ برسیم.

الف) نشان دهید هر جایگشت آغازینی را می‌توان با حداکثر ۲۸۰۰ بار استفاده از عمل چرخش، منظم کرد (۹ نمره).

ب) نشان دهید جایگشت آغازینی وجود دارد که نمی‌توان آن را با حداکثر ۱۴۰۰ بار استفاده از عمل چرخش، منظم کرد (۹ نمره).

سوال دوم: دستگاه درخت‌یاب .... ۱۸ نمره

درختی ۱۴۰۲ رأسی با مجموعه رأس‌های $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_{۱۴۰۲}\}$ داریم که از یال‌های آن اطلاع نداریم. دستگاهی داریم که به کمک آن می‌خواهیم یال‌های درخت را بفهمیم. در هر مرحله، می‌توانیم دو رأس دل‌خواهِ v_i و v_j را به عنوان ورودی به دستگاه بدهیم و به ازای هر یک از این دو رأس ورودی، مطلع شویم کدام رأس‌های درخت می‌توانند به آن رأس برسند، بدون این که نیاز باشد از رأس دیگرِ ورودی عبور کنند. برای مثال، فرض کنید درخت، یک مسیر ۱۴۰۲ رأسی باشد که به ازای هر k (برای $۱ \leq k \leq ۱۴۰۱$) رأس‌های v_k و $v_{k+۱}$ به هم یال داشته باشند؛ در این صورت، اگر رأس‌های $v_۳$ و $v_۷$ را به عنوان ورودی به دستگاه بدهیم، دستگاه اعلام می‌کند مجموعه رأس‌های $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_۶\}$ می‌توانند بدون عبور از $v_۷$، به $v_۳$ برسند و همچنین، مجموعه رأس‌های $\{v_۴, v_۵, \ldots, v_{۱۴۰۲}\}$ می‌توانند بدون عبور از $v_۳$، به $v_۷$ برسند.

نشان دهید کمینه‌ی تعداد مراحل مورد نیاز برای تشخیص کامل یال‌های درخت ۱۴۰۰ است. برای اثبات این موضوع، ابتدا باید روشی ارائه دهید که بتواند یال‌های هر درختی را با حداکثر ۱۴۰۰ مرحله به طور کامل تشخیص دهد و درستی روش خود را نیز ثابت کنید؛ سپس باید نشان دهید روشی وجود ندارد که بتواند یال‌های هر درختی را با کمتر از ۱۴۰۰ مرحله به طور کامل تشخیص دهد.

سوال سوم: ستاره‌بازی .... ۲۲ نمره

به گراف ساده‌ای که دور نداشته باشد، **جنگل** می‌گوییم. همچنین گراف **ستاره**، درختی است که در آن، یک رأس به همه‌ی رأس‌های دیگر یال داشته باشد.

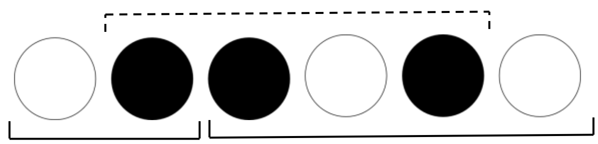
برای هر عدد طبیعیِ n، مقدار $f(n)$ را کمترین عدد طبیعیِ x ای تعریف می‌کنیم که بتوان یال‌های گراف کاملِ n رأسی را به x جنگل افراز کرد، طوری که هر کدام از این جنگل‌ها، اجتماع تعدادی ستاره باشند. برای مثال $f(۶) = ۴$ است. مقدارِ $f(۱۴۰۲)$ را بیابید.

برای حل این سوال:

- ابتدا باید مقدار $f(۱۴۰۲)$ را ارائه کنید. (۲ نمره)
- سپس اگر پاسخ شما برابرِ x است، باید نشان دهید که می‌توان یال‌های گراف کاملِ ۱۴۰۲ رأسی را به x جنگل با شرایط گفته شده افراز کرد. (۱۲ نمره، در صورت درستیِ x و درستی روش ارائه شده)
- در انتها اگر پاسخ شما برابرِ x است، باید نشان دهید که نمی‌توان یال‌های گراف کاملِ ۱۴۰۲ رأسی را به $x - ۱$ جنگل با شرایط گفته شده افراز کرد. (۸ نمره، در صورت درستیِ x و درستی اثبات ارائه شده)

سوال چهارم: توپ‌های سیاه و سفید .... ۲۲ نمره

به چیدنِ n توپ سفید و n توپ سیاه در یک ردیف، **چینش** می‌گوییم. یک زیردنباله‌ی متوالی ناتهی از توپ‌ها در یک چینش را **زیررشته** می‌نامیم. یک زیررشته **متوازن** است اگر تعداد توپ‌های سفید و سیاه در آن برابر باشد. **ارزش** یک چینش را برابر با تعداد اعضای مجموعه‌ی طول‌های زیررشته‌های متوازنِ آن تعریف می‌کنیم. برای مثال، فرض کنید $n = 3$ و رنگ توپ‌ها در چینش، مطابق شکل زیر باشد. در این چینش، زیررشته‌ی تشکیل شده از چهار توپ ابتدایی (از راست به چپ) و زیررشته‌ی تشکیل شده از دو توپ انتهایی، دو نمونه از زیررشته‌های متوازن هستند. در مقابل، زیررشته‌ی تشکیل شده از چهار توپ وسط (همه‌ی توپ‌ها به جز توپ ابتدایی و توپ انتهایی) متوازن نیست. پس مجموعه‌ی طول‌های زیررشته‌های متوازن در این چینش $\{2, 4, 6\}$ است و در نتیجه، ارزش این چینش ۳ می‌شود.



الف) برای $n =$ ۱۴۰۲، نشان دهید چینشی وجود دارد که ارزش آن از ۷۰۲ بیشتر نیست. (۸ نمره)

ب) برای $n =$ ۱۴۰۲، ثابت کنید ارزش هر چینشی حداقل ۷۰۲ است. (۱۴ نمره)

نکته: اگر ثابت کنید ارزش هر چینش حداقل ۳۸ است، ۶ نمره از بخش (ب) را دریافت می‌کنید.