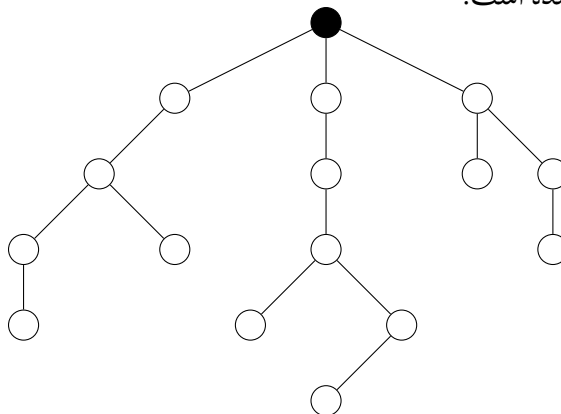


## مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۳ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ امید مدت‌ها پیش در شهر زادگاهش یک مغازه‌ی ساندویچی باز کرده بود و حالا پس از گذشت سال‌ها تصمیم گرفته است تا کسب و کار خود را گسترش دهد. با توجه به محدودیت‌های مالی و استراتژیک، او در هر سال می‌تواند به ازای هر شعبه‌ی ساندویچی خود، در یکی از شهرهای همسایه‌ی آن شعبه، یک شعبه‌ی جدید باز کند (دقت کنید که امید به ازای هر شعبه در هر سال، می‌تواند یک شعبه‌ی جدید باز کند، بنابراین ممکن است در یک سال، بیش از ۱ شعبه‌ی جدید در کشور باز شود). اگر امید بهترین استراتژی را برای باز کردن شعبه‌های ساندویچی خود انتخاب کند، حداقل چند سال زمان نیاز دارد تا در تمامی شهرهای کشورش حداقل یک ساندویچی داشته باشد؟ نقشه‌ی کشور امید در شکل زیر کشیده شده است. در این نقشه، هر شهر با یک دایره نمایش داده شده و شهرهای همسایه با یک خط به هم‌دیگر وصل شده‌اند. هم‌چنین شهر زادگاه امید که اولین شعبه‌ی ساندویچی در آن قرار دارد، در شکل رنگ شده است.



۳ (۵)

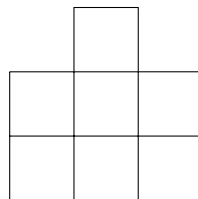
۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۲ هدا ترجیح می‌دهد به جای این که در سفره‌ی هفت‌سین ماهی واقعی بگذارد، یک ماهی را نقاشی کند و از نقاشی‌اش استفاده کند. او یک جدول  $6 \times 6$  دارد که در ابتدا، تمام خانه‌های آن سفید هستند. هدا می‌خواهد ۶ خانه از آن را به شکل زیر (یا دورانی از آن) قرمز کند تا یک ماهی تشکیل شود، اما برادر کوچک‌ترش می‌خواهد تعدادی از خانه‌های جدول را سیاه کند تا هدا نتواند این کار را انجام دهد. برادرش حداقل چند خانه را باید سیاه کند تا هدا نتواند روی خانه‌های سفید جدول ماهی بکشد؟



۴ (۵)

۵ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

## مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور-آزمون چندگزینه‌ای

۳ جعفر و سلاله در حال بازی روی یک دنباله به طول  $N$  هستند که همه‌ی اعضایش در ابتدا ۰ می‌باشند. جعفر بازی را شروع می‌کند و بعد از هر نفر، نوبت به شخص دیگر می‌رسد. جعفر در نوبتش یک عضو از دنباله را که ۰ است، انتخاب کرده و آن را به ۱ تغییر می‌دهد. به طور مشابه، سلاله هم در نوبت خود یک عضو از دنباله را که ۰ است، انتخاب می‌کند و آن را به ۲ تغییر می‌دهد. بازی زمانی پایان می‌یابد که هیچ ۰ ای در دنباله باقی نمانده باشد. در این زمان، امتیاز جعفر برابر با تعداد جفت ۱ های مجاور در دنباله، و امتیاز سلاله هم برابر با تعداد جفت ۲ های مجاور در دنباله است. مثلاً اگر در پایان بازی، دنباله به شکل زیر در آمده باشد، امتیاز هر دو نفر برابر ۲ می‌شود.

$$\langle 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1 \rangle$$

در صورتی که امتیاز دو نفر برابر باشد، بازی مساوی می‌شود و در غیر این صورت، برنده کسی است که امتیاز بالاتری به دست آورده باشد. هدف هر فرد در بازی این است که برنده شود، و اگر برنده شدن ممکن نبود، حداقل در صورت امکان، بازی را به تساوی بکشاند. اگر هر دو نفر بهینه بازی کنند، نتیجه‌ی بازی برای  $N = 8$  و  $N = 9$  به ترتیب (از راست به چپ) چه خواهد بود؟

- (۱) برد سلاله، برد سلاله (۲) برد جعفر، برد سلاله (۳) برد سلاله، برد جعفر (۴) مساوی، برد جعفر (۵) مساوی، برد سلاله

۴ ۶ سکه با ظاهر یکسان ولی وزن‌های متفاوت داریم. می‌خواهیم این سکه‌ها را براساس وزنشان مرتب کنیم. برای این کار یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که می‌توانیم روی هر کفه‌اش یک سکه بگذاریم. این ترازو در هر بار استفاده، سکه‌ی سنگین‌تر را مشخص می‌کند. ما در ابتدا، ۹ جفت سکه‌ی متفاوت را انتخاب می‌کنیم و سپس آن جفت‌ها را با ترازو مقایسه، و نتایج را مشاهده می‌کنیم. در چند حالت از انتخاب این ۹ جفت، بعد از دیدن نتایج، می‌توانیم سکه‌ها را با اطمینان کامل براساس وزنشان مرتب کنیم؟ دو حالت از انتخاب جفت‌های سکه را متفاوت می‌گوییم اگر دو سکه وجود داشته باشند که در یک حالت، با هم جفت شده، و در حالت دیگر، با هم جفت نشده باشند.

(۱) ۲۱۰ (۲) ۳۴۰ (۳) ۳۲۰ (۴) ۱۲۰ (۵) ۴۵۰

۵ یک زمین بسکتبال به شکل زیر داریم. مایکل بسکتبالیست معروف در ابتدا در خانه‌ی شماره‌ی ۱ قرار دارد. او می‌خواهد توپی را که در اختیارش است، به سمت حلقه‌ای که در سمت راست زمین قرار دارد، پرتاب کند. در هر مرحله، او می‌تواند یا یک خانه به سمت راست (در صورت وجود) حرکت کند، یا توپ را پرتاب کند. به علت افزایش مدافعان تیم حریف در نزدیکی حلقه، اگر از خانه‌ی  $i$  به خانه‌ی  $i + 1$  برود، به احتمال  $\frac{1}{15-i}$  ممکن است توپ را از دست بدهد. هم‌چنین اگر از خانه‌ی  $i$  اقدام به پرتاب کند، توپ او با احتمال  $\frac{i}{15}$  گل می‌شود. اگر مایکل به شکلی عمل کند که احتمال گل کردن توپش بیشینه باشد، توپ او با چه احتمالی گل می‌شود؟

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

(۱)  $\frac{23}{60}$  (۲)  $\frac{1}{15}$  (۳)  $\frac{7}{30}$  (۴)  $\frac{4}{15}$  (۵)  $\frac{1}{6}$

## مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

۶ سطل آب داریم که در یک ردیف با شماره‌های یک تا شش قرار دارند. در ابتدا، سطل اول ۱ لیتر آب دارد و باقی سطل‌ها هیچ آبی ندارند. در هر حرکت، می‌توانیم یک سطل را انتخاب کنیم و نصف آبی را که داخلش است، در سطل بعدی بریزیم. به عنوان مثال، اگر سطل سوم  $\frac{۵}{۸}$  لیتر، و سطل چهارم  $\frac{۱}{۸}$  لیتر آب داشته باشد، با انتخاب سطل سوم، مقدار آب درون سطل سوم به  $\frac{۲۵}{۸}$  لیتر کاهش پیدا می‌کند و آب درون سطل چهارم به  $\frac{۳۵}{۸}$  لیتر افزایش پیدا می‌کند. با انجام ۱۰ حرکت، حداکثر چه مقدار آب را می‌توان به سطل آخر رساند؟

- (۱)  $\frac{۲۴۳}{۱۰۲۴}$  (۲)  $\frac{۵۶۷}{۱۰۲۴}$  (۳)  $\frac{۸۷}{۱۰۲۴}$  (۴)  $\frac{۶۳}{۱۰۲۴}$  (۵)  $\frac{۲۳}{۱۰۲۴}$

۷ نگار یک بازی با دنباله‌ها اختراع کرده است. او در این بازی، ابتدا یک دنباله از اعداد صحیح را روی کاغذ می‌نویسد. سپس در هر مرحله، دو عدد مجاور از دنباله را به صورت دل‌خواه انتخاب می‌کند و از هر دوی آن‌ها یک واحد کم می‌کند. اگر در انتها، تمام اعداد دنباله صفر شده باشند، او خوش‌حال می‌شود. چند دنباله به طول ۵ از اعداد ۰ و ۱ و ۲ وجود دارند که با شروع از آن‌ها، نگار می‌تواند طوری بازی کند که در انتها خوش‌حال شود؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۲۰ (۳) ۳۲ (۴) ۲۴ (۵) ۲۳

۸ یک جام حذفی با ۸ تیم با شماره‌های ۱ تا ۸ برگزار می‌شود. در هر مرحله، تیم‌ها به دسته‌های دوتایی افزایش می‌شوند و با هم بازی می‌کنند. بازنده حذف می‌شود و برنده به مرحله‌ی بعد صعود می‌کند. یک تیم تنها در صورتی شانس برد در یک بازی را دارد که شماره‌اش حداقل نصف شماره‌ی حریفش باشد. برای مثال، تیم شماره‌ی ۳ می‌تواند تیم‌های ۱ تا ۶ را برد، اما در مقابل تیم شماره‌ی ۷ شانس برد ندارد. در چند روایت از برگزاری جام، تیم شماره‌ی ۲ می‌تواند قهرمان شود؟ دو روایت متفاوت‌اند اگر حداقل در یک مرحله تیم‌ها را به دو صورت متفاوت افزایش کرده باشند و یا برنده‌ی حداقل یکی از بازی‌های بین دو تیم در این دو روایت متفاوت باشد.

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰ (۵) ۴

۹ برنامه‌ی زیر را که دارای سه متغیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  است، در نظر بگیرید:

۱. متغیرهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را برابر ۰ قرار بده.
۲. اگر  $c = ۱۰$  بود، به برنامه پایان بده.
۳. یک سکه بینداز و اگر شیر آمد، به خط ۵ برو.
۴. مقدار  $b$  را برابر با  $b - ۱$  قرار بده.
۵. مقدار  $a$  را برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم  $(a + ۱)$  بر ۴ قرار بده.
۶.  $c$  را برابر با  $c + ۱$  قرار بده.
۷. به خط ۲ برو.

فرض کنید سکه‌ی استفاده شده در مرحله‌ی ۳، سکه‌ای سالم است و احتمال شیر و خط آمدن آن با هم برابر است. چه قدر احتمال دارد که در طول اجرای برنامه، حداقل در یک لحظه، به طور هم‌زمان  $a = ۲$  و  $b = ۰$  شود؟

- (۱)  $\frac{۱}{۳۲}$  (۲)  $\frac{۱۵}{۱۶}$  (۳)  $\frac{۳۱}{۳۲}$  (۴)  $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$  (۵)  $\frac{۶۳}{۶۴}$

## مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

۱۰ به یک زیررشته (متوالی) از یک رشته‌ی دودویی بد می‌گوییم اگر تعداد صفرهای آن با تعداد یک‌هایش برابر باشد. چند رشته‌ی دودویی به طول ۲۰ وجود دارد که هیچ زیررشته‌ی بد به طول حداقل ۴ نداشته باشد؟

- ۹۰۷ (۱)      ۳۶۲۸ (۲)      ۱۸۱۴ (۳)      ۲۷۲۱ (۴)      ۱۰۲۴ (۵)

۱۱ در رستوران سرزمین عجایب، صرفاً یک میز گرد با  $N$  صندلی وجود دارد و فقط به زوج‌ها سرویس داده می‌شود. آرتین و سارا، دو گارسون در این رستوران هستند. آرتین و سارا به صورت یکی در میان و با شروع از آرتین، به زوج‌هایی که از راه می‌رسند کمک می‌کنند تا جایی برای نشستن پیدا کنند. هر زوج باید کنار یکدیگر بنشینند و نمی‌توان این دو نفر را روی صندلی‌های غیرمجاور نشانند. هم‌چنین، یک خانم و آقا تنها در صورتی می‌توانند کنار هم بنشینند که زوج باشند. هنگام نشانیدن یک زوج، آرتین همیشه آقا را سمت راست خانم می‌نشانند، و سارا همیشه آقا را سمت چپ خانم می‌نشانند. اولین کسی که نتواند جایی برای نشانیدن یک زوج پیدا کند، توسط صاحب رستوران جریمه می‌شود. به ازای چند مورد از اعضای مجموعه‌ی  $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$  به‌عنوان  $N$ ، آرتین می‌تواند طوری زوج‌ها را سر میز بنشانند که مستقل از نحوه‌ی نشانیدن زوج‌ها توسط سارا، هیچ‌گاه جریمه نشود؟

- ۴ (۱)      ۲ (۲)      ۰ (۳)      ۱ (۴)      ۳ (۵)

۱۲ نیکو و امیرمحمد روی جایگشت  $\langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ \rangle$  بازی می‌کنند. نیکو بازی را شروع می‌کند و بعد از هر نفر، نوبت به شخص دیگر می‌رسد. هر کسی در نوبتش جایگشت را از  $\langle p_۱, p_۲, p_۳, p_۴, p_۵, p_۶ \rangle$  به یکی از دو جایگشت  $A = \langle a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶ \rangle$  یا  $B = \langle b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵, b_۶ \rangle$  تبدیل می‌کند که  $A = \langle a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶ \rangle$  و  $B = \langle b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵, b_۶ \rangle$  در ادامه مشخص می‌شوند. هر کسی که جایگشت تکراری بسازد، بازی را می‌بازد. به ازای کدام حالت‌های زیر برای  $A$  و  $B$ ، نیکو همواره می‌تواند طوری بازی کند که مستقل از حرکات امیرمحمد، برنده‌ی بازی باشد؟

۱.  $A = \langle ۵, ۶, ۱, ۲, ۳, ۴ \rangle$  و  $B = \langle ۳, ۴, ۵, ۶, ۱, ۲ \rangle$

۲.  $A = \langle ۲, ۵, ۶, ۱, ۳, ۴ \rangle$  و  $B = \langle ۴, ۱, ۵, ۶, ۲, ۳ \rangle$

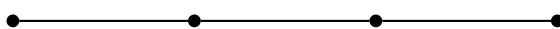
۳.  $A = \langle ۶, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \rangle$  و  $B = \langle ۵, ۶, ۱, ۲, ۳, ۴ \rangle$

- حالت ۳ (۱)      حالت ۲ (۲)      حالت‌های ۲ و ۳ (۳)      حالت ۴ (۴)      هیچ‌کدام (۵)

منظور از عددگذاری یک گراف، نوشتن یک عدد صحیح روی هر رأس آن است. عددگذاری یک گراف را زیبا می‌گوییم اگر برای هر رأس  $v$ ، عدد روی آن برابر با تعداد همسایه‌هایی از  $v$  باشد که عددشان از عدد روی  $v$  کمتر است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

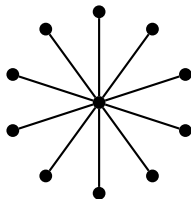
۱۳ برای گراف زیر که یک مسیر ۴ رأسی است، چند عددگذاری زیبا وجود دارد؟



- ۱۷ (۱)      ۹ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۶ (۴)      ۱۱ (۵)

مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

۱۴ برای گراف زیر که یک ستاره‌ی ۱۱ رأسی است، چند عددگذاری زیبا وجود دارد؟



۲۰۴۸ (۵)

۲ (۴)

۳ (۳)

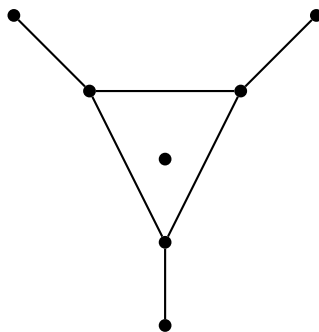
۱۰۲۵ (۲)

۱۰۲۴ (۱)

می‌خواهیم اعداد ۱ تا  $n$  را روی رأس‌های یک گراف  $n$  رأسی بنویسیم به طوری که هر عدد دقیقاً یک بار نوشته شده باشد و اختلاف عددهای روی دو سرِ هر یال حداکثر ۲ باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ در گراف زیر، چند روش برای انجام کار خواسته شده وجود دارد؟



۱۸ (۵)

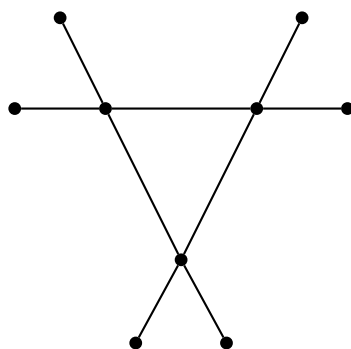
۶۰ (۴)

۱۲ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

۱۶ در این سوال ما اجازه داریم اعداد را به شکلی بگذاریم که شرط گفته شده درباره‌ی حداکثر یکی از یال‌ها برقرار نباشد؛ یعنی اختلاف عددهای دو سر یک یال می‌تواند از ۲ بیشتر شود. حال با توجه به شرایط جدید، چند روش برای انجام کار گفته شده در گراف زیر وجود دارد؟



۴۸ (۵)

۰ (۴)

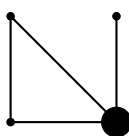
۲۴ (۳)

۳۲ (۲)

۶۴ (۱)

## مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

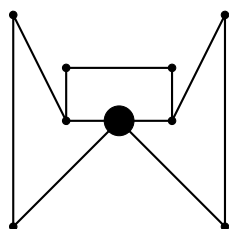
بیژن یک جهانگرد با سابقه است که برای گشت و گذار در کشورها روش مخصوصی دارد. او همیشه سفرش در یک کشور را از پایتخت آن شروع می‌کند و در انتهای سفر نیز به پایتخت باز می‌گردد. او دوست دارد علاوه بر سر زدن به همه‌ی شهرهای یک کشور، از همه‌ی جاده‌های آن نیز حداقل یک بار عبور کند. بیژن از آن‌جا که بودجه‌ی محدودی دارد و چند بار عبور کردن از یک جاده برای او جذابیتی ندارد، می‌خواهد تعداد جاده‌هایی که از آن‌ها بیش از یک بار عبور می‌کند کمینه شود. هر کشور از تعدادی شهر و جاده تشکیل شده است. هر جاده دو شهر را به هم متصل می‌کند و دوطرفه است. در نقشه‌ی یک کشور، شهرها به صورت دایره‌های کوچک نمایش داده می‌شوند و شهر پایتخت دایره‌ی بزرگ‌تری دارد. برای مثال، شکل زیر نقشه‌ی یک کشور است که بیژن برای گشتن در آن، باید از حداقل یک جاده دو بار عبور کند.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

بیژن می‌خواهد در اولین سفر امسالش به کشوری برود که نقشه‌اش به شکل زیر است. اگر او بخواهد با روش مخصوص خودش کل کشور را بگردد، از حداقل چند جاده باید بیش از یک بار عبور کند؟

۱۷



۳ (۵)

۱ (۴)

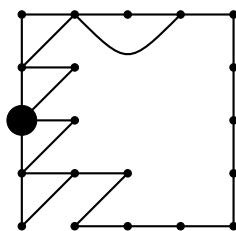
۵ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

بیژن در سفر دومش به کشوری می‌رود که نقشه‌اش به شکل زیر است. اگر او بخواهد این کشور را هم با روش مخصوص خودش بگردد، از حداقل چند جاده باید بیش از یک بار عبور کند؟

۱۸



۴ (۵)

۳ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۱۰ (۱)

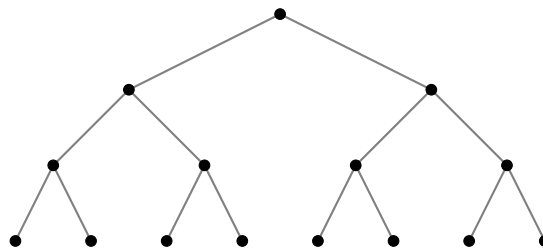
## مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

آرین و پارمیس در حال انجام یک بازی روی یک گراف هستند و می‌خواهند رأس‌های آن را رنگ‌آمیزی کنند. در ابتدای بازی، رأس‌های گراف، قرمز، آبی، یا بدون رنگ هستند. بازی را آرین شروع می‌کند و بعد از هر نفر، نوبت به شخص دیگر می‌رسد. آرین در هر نوبتش، یک رأس بدون رنگ را که حداقل یک همسایه‌ی قرمز دارد، انتخاب، و آن را قرمز می‌کند. به طور مشابه، پارمیس هم در هر نوبت خود، یک رأس بدون رنگ را که حداقل یک همسایه‌ی آبی دارد، انتخاب، و آن را آبی می‌کند. هر کسی که نتواند رأس جدیدی را رنگ‌آمیزی کند، بازی را می‌بازد. دو رأس را همسایه می‌نامیم اگر بین‌شان یالی وجود داشته باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

در این سوال، بازی روی گراف زیر انجام می‌شود. قبل از شروع بازی، ابتدا دو رأس متفاوت قرمز و آبی می‌شوند و سپس بازی آغاز می‌گردد. در چند مورد از وضعیت‌های شروع بازی، آرین می‌تواند طوری بازی کند که مستقل از نحوه‌ی بازی پارمیس، همواره برنده‌ی بازی باشد؟ دو وضعیت شروع بازی را متفاوت می‌دانیم اگر رنگ حداقل یک رأس در این دو وضعیت متفاوت باشد.

۱۹



۱۴۰ (۵)

۱۳۳ (۴)

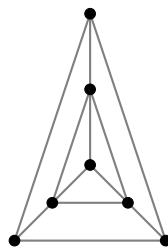
۱۰۵ (۳)

۱۷۵ (۲)

۱۵۴ (۱)

در این سوال، بازی روی گراف زیر انجام می‌شود. این بار قبل از شروع بازی، ابتدا آرین یک رأس را انتخاب، و آن را قرمز می‌کند، و بعد از آن، پارمیس به انتخاب خودش، یک رأس دیگر را آبی می‌کند، و سپس بازی شروع می‌شود. تعداد رأس‌هایی را بیابید که آرین اگر قبل از شروع بازی، یکی از آنها را انتخاب کرده باشد، مستقل از نحوه‌ی بازی پارمیس یا رأسی که پارمیس قبل از شروع بازی انتخاب می‌کند، بتواند همواره برنده‌ی بازی باشد.

۲۰



۴ (۵)

۳ (۴)

۷ (۳)

۱ (۲)

۶ (۱)