

سوال اول ۱۸ نمره

یک جدول با ۱۴۰۱ سطر و ۳ ستون داریم. به خانه‌های تلاقی مجموعه‌ای از سطرهای متوالی و مجموعه‌ای از ستون‌های متوالی، یک زیرجدول می‌گوییم. در ابتدا ایمان به ازای هر سطر جدول، دقیقاً دو خانه از سه خانه را انتخاب می‌کند و داخل آن‌ها مهره قرار می‌دهد. سپس اسکندر در تعدادی حرکت، همه‌ی مهره‌های جدول را حذف می‌کند. او در هر حرکت، یک زیرجدول انتخاب می‌کند که تمام خانه‌های آن دارای مهره باشد و آن مهره‌ها را حذف می‌کند.

الف) ثابت کنید اسکندر همواره می‌تواند تمامی مهره‌ها را در حداکثر ۱۴۰۲ حرکت حذف کند. (۹ نمره)

ب) ثابت کنید ایمان می‌تواند در ابتدا طوری مهره‌ها را قرار دهد که اسکندر برای حذف همه‌ی آن‌ها حداقل ۱۴۰۲ حرکت لازم داشته باشد. (۹ نمره)

سوال دوم ۱۸ نمره

در یک زندان، ۳۲ نفر با اسامی متمایز در ۳۲ سلول زندانی هستند. زندان بان زندان عوض شده و زندان بان جدید می‌خواهد لیستی از اسامی ۳۲ زندانی تهیه کند. او برای این کار با زندانی‌ها توافق می‌کند که این بازی را انجام دهند:

هر روز، ابتدا زندان بان دو سلول را انتخاب می‌کند؛ سپس با مراجعه به آن دو سلول، زندانی‌های هر کدام از آن دو سلول را می‌بیند و اگر هر یک از آن‌ها را قبلاً ندیده باشد، اسم آن فرد را هم به لیست خود اضافه می‌کند. همان شب و دور از چشم زندان بان، یکی از آن دو زندانی سلولش را با یکی از ۳۱ زندانی دیگر عوض می‌کند.

آیا زندان بان در هر شرایطی (به ازای تمام عملکردهای ممکن زندانی‌ها) می‌تواند در حداکثر ۱۰۲۴ روز، لیستی از اسامی همه‌ی زندانی‌ها را تهیه کند؟

توضیح: اگر پاسخ شما برای این سوال «بله» است، باید روشی برای زندان بان ارائه کنید که در حداکثر ۱۰۲۴ روز، لیست اسامی زندانی‌ها را تهیه کند. هم‌چنین اگر پاسخ شما برای این سوال «خیر» است، باید اثبات کنید به ازای هر الگوریتم زندان بان، حالتی وجود دارد که او به هدفش نرسد.

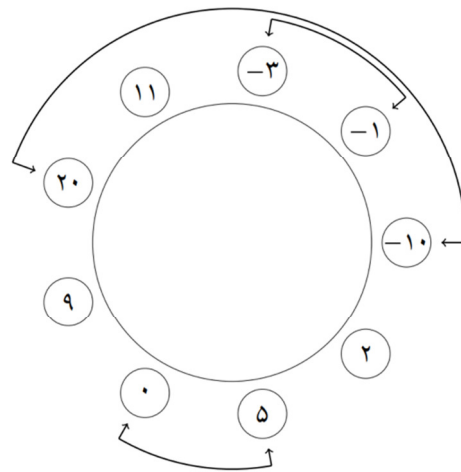
سوال سوم ۱۸ نمره

تعدادی عدد متمایز دور یک دایره داریم که در ابتدا همه‌ی آن‌ها سفید هستند. یک عدد را دره می‌گوییم، اگر از هر دو عدد مجاورش کوچک‌تر باشد. هم‌چنین یک عدد را قله می‌نامیم، اگر از هر دو عدد مجاورش بزرگ‌تر باشد.

روی اعداد به ترتیب از کوچک به بزرگ، عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

- اگر دره است، آن را سیاه می‌کنیم.
- اگر قله است، از این عدد به دو جهت حرکت می‌کنیم تا به اولین دره‌ی سیاه برسیم و از میان این دو دره‌ی سیاه عدد بزرگ‌تر را انتخاب کرده و با قله‌ی مذکور جفت می‌کنیم و دره‌ای که جفت شده را قرمز می‌کنیم. (اگر از دو جهت به یک دره‌ی سیاه یکسان رسیدیم، همان را انتخاب می‌کنیم.)
- در غیر این صورت، کاری انجام نمی‌دهیم.

به این ترتیب، در نهایت دره‌ها و قله‌ها به جفت‌هایی افزای می‌شوند. در شکل زیر، افزای حاصل از اجرای الگوریتم در یک نمونه آمده است.



حال، هر عدد را با قرینه‌اش جایگزین کرده و الگوریتم گفته شده را با اعداد جدید اجرا می‌کنیم. ثابت کنید دو عدد در اجرای دوم الگوریتم جفت می‌شوند، اگر و تنها اگر اعداد متناظرشان (قرینه‌هایشان) در اجرای اول الگوریتم جفت شده باشند.

سوال چهارم ۲۶ نمره

فرض کنید n یک عدد طبیعی، و A زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, n-1\}$ باشد. در یک درخت n رأسی، یک مسیر را A -پسند گوئیم، اگر طول (تعداد یال‌های) آن عضوی از A باشد. $f(n, A)$ را بیشینه‌ی تعداد مسیرهای A -پسند در میان تمام درخت‌های n رأسی در نظر بگیرید. برای مثال:

$$f(5, \{1, 2, 4\}) = 10 \quad \text{و} \quad f(5, \{1, 4\}) = 5$$

الف) $f(2022, \{3, 4, 5, \dots, 1401\})$ را بیابید. (۸ نمره)

ب) $f(2022, \{3, 5, 7, \dots, 1399, 1401\})$ را بیابید. (۵ نمره)

پ) $f(2022, \{1401\})$ را بیابید. (۱۳ نمره)