

## سوال اول. جدول بازی ..... ۲۴ نمره

امید و دخترش فرناز بازی زیر را در یک جدول  $n \times n$  انجام می دهند:

امید بازی را شروع می کند. هر کس در هر نوبت خود در طول بازی، یکی از خطوط جدول (یکی از  $n + 1$  خط عمودی یا یکی از  $n + 1$  خط افقی) را به طور کامل پاک می کند. در ابتدای بازی، همه  $n^2$  خانه  $1 \times 1$  جدول سالم هستند، اما پس از هر نوبت ممکن است تعدادی از خانه های سالم به دلیل پاک شدن یکی از ضلع هایشان خراب شوند (واضح است خانه ای که خراب شده است تا انتها خراب باقی می ماند). وضعیت جدول را *ویران* می نامیم، اگر تمام  $n^2$  خانه  $1 \times 1$  از جدول اولیه خراب شده باشند. به محض این که جدول ویران شود، بازی به پایان می رسد.

می گوئیم یک بازی کن *استراتژی برد* دارد اگر بتواند به نحوی بازی کند که مستقل از حرکات نفر مقابل همیشه برنده ی بازی باشد.

الف) در این بخش، کسی که آخرین حرکت بازی را انجام دهد بازنده ی بازی می شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟ (۱۰ نمره)

ب) در این بخش، کسی که آخرین حرکت بازی را انجام دهد برنده ی بازی می شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟ (۱۴ نمره)

## سوال دوم. بینش ابوالفضل مظفری ..... ۲۴ نمره

یک گراف کامل ۱۴۰۰ رأسی داریم که رأس‌های آن با شماره‌های ۱ تا ۱۴۰۰ شماره‌گذاری شده‌اند. ابوالفضل هر یال آن را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی می‌کند (ممکن است تمام یال‌ها با یک رنگ، رنگ‌آمیزی شوند). مظفر می‌داند که گراف ابوالفضل یک گراف کامل ۱۴۰۰ رأسی است که یال‌های آن با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ‌آمیزی شده‌اند، اما از رنگ هر یال آن اطلاعی ندارد و می‌خواهد رنگ یال‌های گراف او را بفهمد. برای این کار، مظفر در هر مرحله یک دور از گراف را (با گفتن شماره‌ی رأس‌های دور به ترتیب) مشخص می‌کند و ابوالفضل تعداد یال‌های قرمز آن دور را به مظفر می‌گوید.

الف) مظفر ادعا می‌کند پس از آن که تعداد یال‌های قرمز در هر یک از دورهای ۱۴۰۰ رأسی را از ابوالفضل بپرسد، می‌تواند رنگ یال‌های گراف ابوالفضل را در هر شکلی از رنگ‌آمیزی بفهمد. نشان دهید ادعای مظفر اشتباه است. (۱۰ نمره)

ب) به مظفر نشان دهید اگر دست از لج‌بازی بردارد و علاوه بر دورهای ۱۴۰۰ رأسی، تعداد یال‌های قرمز در هر یک از دورهای ۱۳۹۹ رأسی را هم بپرسد، آن‌گاه می‌تواند رنگ یال‌های گراف ابوالفضل را در هر شکلی از رنگ‌آمیزی بفهمد. (۱۴ نمره)

سوال سوم. رأس نباید درجه یک باشد ..... ۲۴ نمره

گراف ساده و  $n$  رأسی  $G$  را با این شرط در نظر بگیرید که دور همیلتونی (دور به طول  $n$ ) دارد و  $T$  یک زیردرخت فراگیر آن است (یعنی زیرگرافی  $n$  رأسی که درخت باشد).  $F(G, T)$  را کمینه‌ی تعداد یال‌هایی از  $G$  در نظر بگیرید که باید به درخت  $T$  اضافه کنیم تا درجه‌ی هر رأس آن حداقل ۲ شود.

مقدار  $p(n)$  را برابر بیشینه‌ی مقدار  $F(G, T)$  به ازای همه‌ی گراف‌های  $n$  رأسی  $G$  (با شرایط گفته شده) و همه‌ی زیردرخت‌های فراگیر  $T$  از  $G$  تعریف می‌کنیم. مقدار  $p(n)$  به ازای  $n \geq 3$  چند است؟

توضیح: برای پاسخ لازم است ابتدا مقدار مورد نظر خود را بر حسب  $n$  بیان کنید (۲ نمره)، سپس به ازای هر  $n$  مثالی بزنید که مقدار بیشینه را داشته باشد (۸ نمره) و نهایتاً نشان دهید  $F(G, T)$  برای هر گراف  $n$  رأسی  $G$  (با شرایط گفته شده) و هر زیردرخت فراگیر  $T$  از  $G$  از مقدار  $p(n)$  مورد نظر شما بیش تر نمی‌شود. (۱۴ نمره).

## سوال چهارم. جبارزید و استاد سحرآمیز ..... ۲۸ نمره

۱۴۰۰ نفر از سه کشور مختلف داریم. هدف جبارزید یافتن سه نفر از این افراد است که از سه کشور متمایز باشند. جبارزید تعداد افراد هر کشور را نمی‌داند و فقط می‌داند که این ۱۴۰۰ نفر، از سه کشور مختلف هستند و از هر کشور حداقل یک نفر وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند تعدادی از این افراد را انتخاب کند و به استاد نشان دهد تا استاد در جواب، عددی بین یک تا سه بگوید که مشخص می‌کند این افراد از چند کشور مختلف هستند. جبارزید می‌خواهد با کم‌ترین تعداد مرحله به هدف خود برسد.

الف) ثابت کنید جبارزید می‌تواند این کار را در حداکثر ۲۳ مرحله (یا حتی کم‌تر!) انجام دهد. (۱۴ نمره)

ب) ثابت کنید جبارزید نمی‌تواند در کم‌تر از ۱۲ مرحله به هدف خود برسد. (۱۴ نمره)

توضیح برای بخش ب: اگر ثابت کنید جبارزید در کم‌تر از ۱۱ مرحله نمی‌تواند این کار را انجام دهد ۸ نمره از ۱۴ نمره‌ی بخش را می‌گیرید و اگر ثابت کنید در کم‌تر از ۱۰ مرحله نمی‌تواند این کار را انجام دهد ۶ نمره از بخش را دریافت می‌کنید.