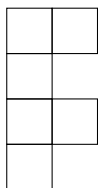


## مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

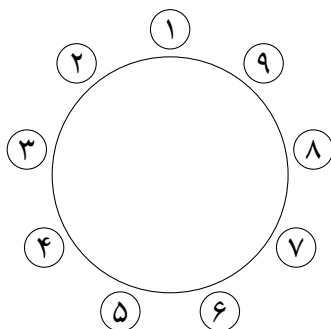
- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارایه شده است.

۱ یک جدول  $۱۲ \times ۴$  داریم. حداقل چند خانه‌ی آن را باید مسدود کنیم تا نتوان در خانه‌های باقی‌مانده حتی یک کاشی به شکل زیر (یا دوران‌ها و قرینه‌های آن) قرار داد؟



- ۱۶ (۵)
۱۸ (۴)
۱۲ (۳)
۲۴ (۲)
۶ (۱)

۲ ۹ نفر با شماره‌های ۱ تا ۹ دور یک دایره نشسته‌اند:



به ازای هر نفر، دو نفری که بیش‌ترین فاصله را از او دارند، دوستان او گوئیم. برای مثال دوستان فرد شماره ۱، افراد شماره ۵ و ۶ هستند. در ابتدا تویی در اختیار نفر شماره ۱ است. در هر مرحله، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به سمت یکی از دوستانش پرتاب می‌کند و دوست مورد نظر آن را می‌گیرد. به چند طریق می‌توان توپ را پس از دقیقاً ۱۴ مرحله به فرد شماره ۴ رساند؟ تا قبل از مرحله‌ی ۱۴ نیز توپ می‌تواند به نفر شماره ۴ برسد، اما مهم این است که پس از مرحله‌ی ۱۴م توپ در اختیار نفر شماره ۴ باشد.

- ۱۰۱۵ (۵)
۱۳۶۵ (۴)
۱۰۰۱ (۳)
۲۲۳ (۲)
۱۴ (۱)

۳ پنج سیب یکسان و پنج پرتقال یکسان در یک سبد داریم. در هر مرحله، می‌توانیم یکی از سه کار زیر را انجام دهیم:

- یک سیب از سبد برداریم و بخوریم.
- یک پرتقال از سبد برداریم و بخوریم.
- یک سیب و یک پرتقال از سبد برداریم و بخوریم.

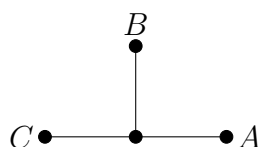
به چند طریق می‌توانیم کل میوه‌ها را بخوریم، طوری که به جز ابتدا و انتهای کار، در هیچ لحظه‌ای تعداد سیب و پرتقال‌های سبد برابر نباشد؟

- ۸۴ (۵)
۴۷۲ (۴)
۱۶۸ (۳)
۱۸۰ (۲)
۹۰ (۱)

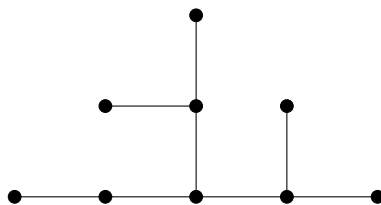
## مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۴

یک بوته در مبدأ صفحه‌ی مختصات کاشته شده است. به نقاط با مختصات صحیح صفحه، نقاط شبکه‌ای گوئیم. در هر ثانیه از هر نقطه‌ی شبکه‌ای بوته که رشدی از آن صورت نگرفته، سه شاخه به طول واحد در جهت‌های راست، بالا و چپ شروع به رشد می‌کنند. در صورتی که در آن جهت شاخه‌ای از قبل موجود باشد، شاخه‌ی جدیدی رشد نمی‌کند. هم‌چنین اگر دو شاخه‌ی در حال رشد به یک نقطه برسند، یکی از آن‌ها به طور تصادفی می‌شکند. اگر هم شاخه‌ی در حال رشد به نقطه‌ای برسد که قبلاً در آن نقطه شاخه‌ای وجود داشته، می‌شکند. برای مثال پس از یک ثانیه بوته به شکل زیر در می‌آید:



در ثانیه‌ی دوم از هر کدام از نقاط شبکه‌ای جدید  $(A, B, C)$ ، شاخه‌ها شروع به رشد می‌کنند. با توجه به این که شاخه‌ی سمت چپ  $A$  و شاخه‌ی سمت راست  $C$  از قبل موجود است، این دو شاخه رشد نخواهند کرد. هم‌چنین شاخه‌ی بالای  $A$  و شاخه‌ی سمت راست  $B$  به یک نقطه می‌رسند، پس یکی از آن‌ها باید به تصادف بشکند (همین امر برای شاخه‌ی بالای  $C$  و شاخه‌ی چپ  $B$  صادق است). برای مثال یکی از حالات بوته پس از ثانیه‌ی دوم در شکل زیر قابل مشاهده است:



پس از ۴ ثانیه، شکل بوته چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۳۲۷۶۸ (۲) ۱۲۸ (۳) ۴۰۹۶ (۴) ۳۶ (۵)  $\binom{12}{6}$

۵

شایان، بهنود و سینا به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف با سه صندلی نشسته‌اند و می‌خواهند بازی کنند. قرار است این افراد سه بار از صندلی‌ها بلند شده و به ترتیبی دیگر بنشینند. هر مرحله‌ی بازی به صورت زیر انجام می‌شود:

اگر ترتیب کنونی افراد  $\langle a, b, c \rangle$  باشد، فرد  $b$  یکی از دو حالت  $\langle b, a, c \rangle$  یا  $\langle a, c, b \rangle$  را برای ترتیب نشستن بعدی انتخاب می‌کند.

برنده‌ی بازی کسی است که پس از مرحله‌ی سوم روی صندلی وسط باشد. هر فرد یک دشمن نیز دارد. دشمن‌های شایان، بهنود و سینا به ترتیب بهنود، سینا و شایان هستند. هر فرد می‌خواهد در اولویت اول خودش ببرد و در اولویت دوم دشمنش نبرد. کدام گزاره یا گزاره‌های زیر درست هستند؟

- (آ) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، شایان برنده خواهد شد.  
 (ب) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، بهنود برنده خواهد شد.  
 (پ) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، سینا برنده خواهد شد.  
 (ت) بهنود مستقل از نحوه‌ی بازی دیگران می‌تواند طوری بازی کند که سینا برنده نشود.

- (۱) ب و ت (۲) پ و ت (۳) آ (۴) ب (۵) آ و ت

## مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

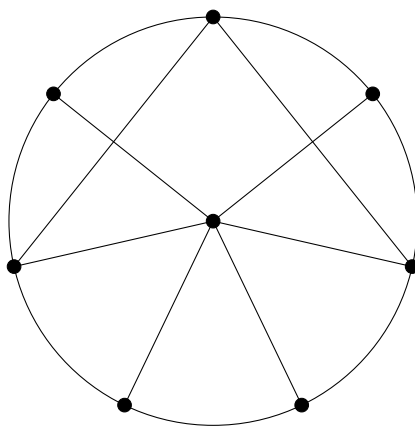
۶ ۱۳۹۸ نفر دور یک دایره هستند و همگی زامبی شده‌اند. دانشمندان دریافته‌اند که عامل زامبی شدن، ویروسی به نام زابون است و دستگاهی اختراع کرده‌اند که زابون را از بدن زامبی بیرون می‌کشد. هر زامبی یکی از این دستگاه‌ها در اختیار دارد. در هر مرحله به طور همزمان، هر زامبی زابون را از بدن خود با استفاده از دستگاه بیرون می‌کشد، سپس یکی از دو نفر مجاور خود را انتخاب کرده و ویروس را به او منتقل می‌کند. پس از انجام مرحله، هر فردی که از یک یا هر دو مجاور خود زابون دریافت کند، زامبی و بقیه سالم می‌شوند. کمینه‌ی تعداد مراحل را بیابید تا به وضعیتی برسیم که فقط دو زامبی در میان افراد باشد.

(۱) رسیدن به چنین وضعیتی امکان ندارد (۲) ۱۳۹۸ (۳) ۶۹۹ (۴) ۶۹۸ (۵) ۱۳۹۷

۷ **سلطان و ایلچ** با هم بازی می‌کنند. پنج ماشین به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۵ پشت سر هم قرار گرفته‌اند (ماشین شماره ۱ جلوترین ماشین است). ابتدا ایلچ دنباله‌ای از اعداد ۲ تا ۵ ارائه می‌کند که به ازای هر  $i \in \{2, 3, 4, 5\}$  عدد  $i$  دقیقاً  $i - 1$  بار در دنباله آمده است. سپس سلطان در جایی دل‌خواه از دنباله، یک عدد ۱ قرار می‌دهد؛ به این ترتیب دنباله‌ای از ۱۱ عدد مانند  $\langle a_1, a_2, \dots, a_{11} \rangle$  به دست می‌آید. نهایتاً در مرحله‌ی  $z$ ام ( $1 \leq z \leq 11$ )، ماشین  $a_z$  از ماشین جلوی خودش سبقت می‌گیرد (اگر  $a_z$  جلوترین ماشین بود، سبقتی در آن مرحله انجام نمی‌شود). سلطان می‌خواهد پس از انجام مراحل، ماشین شماره ۱ در جلوترین مکان ممکن و ایلچ می‌خواهد ماشین شماره ۱ در عقب‌ترین مکان ممکن باشد. اگر دو نفر به شکل بهینه بازی کنند، ماشین شماره ۱ در کجای صف خواهد بود؟

(۱) سومین ماشین از جلو (۲) دومین ماشین از جلو (۳) عقب‌ترین ماشین (۴) جلوترین ماشین (۵) چهارمین ماشین از جلو

۸ هشت شایعه‌ساز داریم که گراف آشنایی آن‌ها به شکل زیر است (آشنایی را رابطه‌ای دوطرفه در نظر بگیرید):



هر شایعه‌ساز هر روز می‌تواند یکی از سه کار زیر را انجام دهد:

- استراحت کند.
- یک شایعه‌ی جدید بسازد! در این صورت او به دلیل فشار کاری، روز بعد را باید استراحت کند.
- تمام شایعه‌هایی را که تا قبل از آن روز داشته (چه خودش ساخته باشد و چه از طریق آشنایانش گرفته باشد)، به تمام آشنایانش بگوید.

دریافت کردن شایعه‌های آشنایان، مستقل از سه حالت بالاست و حتی شایعه‌ساز در حال استراحت هم می‌تواند شایعه دریافت کند. به یک شایعه فراگیر گوئیم، اگر تمام هشت نفر آن را بدانند. پس از ۱۶ روز حداکثر چند شایعه‌ی فراگیر متمایز وجود خواهد داشت؟

(۱) ۶۰ (۲) ۱۱۲ (۳) ۵۶ (۴) ۱۴ (۵) ۱۲۰

## مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۹ در یک صف تاکسی تعداد زیادی آدم ایستاده‌اند. هر خودرو که می‌آید به احتمال  $\frac{1}{2}$  سمند است که چهار نفر جلوی صف را سوار می‌کند و به احتمال  $\frac{1}{2}$  ون است که ۱۰ نفر جلوی صف را سوار می‌کند. سلطان و ایلچ نفرت ۹۹م و ۱۰۰م صف هستند. به چه احتمالی این افراد در یک خودرو قرار خواهند گرفت؟

- (۱)  $\frac{1023}{1024}$  (۲)  $\frac{2047}{2048}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱ (۵)  $\frac{299-1}{299}$

۱۰ الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. مقادیر  $ans$ ،  $s$  و  $i$  را به ترتیب ۰، ۰ و ۱ قرار بده.
۲. مجموعه‌ی  $X$  را تهی قرار بده.
۳. مقدار  $i$  را  $i + 1$  قرار بده.
۴. اگر  $i$  برابر ۱۰ بود، مقدار  $ans$  را  $ans + s$  قرار بده؛ در غیر این صورت به مرحله‌ی ۳ برو.
۵. مقدار  $i$  را  $i - 1$  قرار بده.
۶. اگر  $i$  برابر صفر بود، به مرحله‌ی ۱۰ برو.
۷. اگر  $i \in X$  نبود به مرحله‌ی ۹ برو.
۸. عدد  $i$  را از  $X$  حذف کن و مقدار  $s$  را  $s - i$  قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۵ برو.
۹. عدد  $i$  را به  $X$  اضافه کن و مقدار  $s$  را  $s + i$  قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۳ برو.
۱۰. پایان.

پس از پایان اجرای الگوریتم مقدار  $ans$  چه خواهد بود؟

- (۱) ۱۱۵۲۰ (۲) ۴۵ (۳) ۲۳۰۴۰ (۴) ۲۸۱۶۰ (۵) الگوریتم هیچ گاه پایان نمی‌یابد

۱۱ جدولی به شکل زیر داریم و رباتی در خانه‌ی ۱ قرار دارد. او در هر حرکت می‌تواند به یک خانه‌ی مجاور (در ضلع) برود.

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

شایان یک عدد شش رقمی با ارقام ۲ تا ۹ به ربات می‌دهد که هیچ دو رقم متوالی آن یکسان نیستند. سپس ربات رقم سمت چپ عدد را می‌بیند و با کوتاه‌ترین مسیر ممکن به خانه‌ی متناظر آن رقم می‌رود (اگر چند کوتاه‌ترین مسیر وجود داشت، یکی را به دل‌خواه انتخاب می‌کند). سپس به ازای تمام ارقام دیگر عدد نیز به ترتیب از چپ به راست همین کار را انجام می‌دهد. اگر بدانیم دنباله‌ی خانه‌هایی که ربات دیده به ترتیب از چپ به راست برابر

۱, ۲, ۵, ۶, ۳, ۶, ۹, ۸, ۵, ۸, ۷

باشد، چند حالت برای عدد شایان وجود دارد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶ (۵) ۱۲

## مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۲ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۸ در یک جمع حضور دارند. یک تاس ۱۳۹۸ وجهی داریم که روی وجه‌های آن اعداد ۱ تا ۱۳۹۸ حک شده‌اند و در هر پرتاب، اعداد به احتمال برابر می‌آیند. ابتدا یک بار تاس را می‌اندازیم و هر عددی مانند  $k$  آمد، تصمیم می‌گیریم یک تیم  $k$  نفره از جمع تشکیل دهیم. سپس هر مرحله تاس را می‌اندازیم و فرض کنید عدد  $a$  بیاید؛ اگر نفر شماره  $a$  در تیم انتخاب نشده بود،  $a$  را به تیم اضافه می‌کنیم و در غیر این صورت کاری نمی‌کنیم. آن قدر تاس را می‌اندازیم تا تعداد نفرات تیم  $k$  شود. امید ریاضی مجموع شماره‌ی افراد تیم را بیابید.

(۱)  $\frac{1398 \times 1399}{2}$       (۲)  $\frac{1398^2}{4}$       (۳)  $\frac{1398 \times 1399}{4}$       (۴)  $\frac{1399^2}{4}$       (۵)  $\frac{1398 \times 1399}{4}$

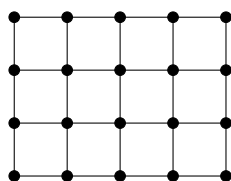
۱۳ سلطان، ایلچ و آبولف سه برادر هستند. پدر آن‌ها شش هدیه برای آن‌ها خریده است. هر کدام از بچه‌ها به ازای هر هدیه گفتند به چه میزانی با گرفتن آن هدیه خوشحال می‌شوند. این مقادیر در جدول زیر آمده است:

	هدیه‌ی ۱	هدیه‌ی ۲	هدیه‌ی ۳	هدیه‌ی ۴	هدیه‌ی ۵	هدیه‌ی ۶
سلطان	۱۰	۱۳	۸	۶	۳	۴
ایلچ	۲	۱۱	۴	۵	۶	۳
آبولف	۶	۱۰	۶	۴	۸	۴

پدر می‌خواهد این شش هدیه را بین سه فرزندش تقسیم کند. لزومی ندارد به هر کس دقیقاً دو هدیه برسد. همچنین ممکن است مجموعه‌ی هدایای یک فرد تهی باشد. گوییم فرد  $A$  به فرد  $B$  حسادت خواهد کرد، اگر با عوض کردن هدیه‌هایشان، مجموع خوشحالی  $A$  بیش‌تر شود. تعداد زوج مرتب‌های  $(A, B)$  را که  $A$  به  $B$  حسادت کند، میزان بدبختی پدر می‌گوییم. کمینه‌ی میزان بدبختی پدر را بیابید.

(۱) ۰      (۲) ۳      (۳) ۲      (۴) ۱      (۵) ۴

فرض کنید یک جدول  $m \times n$  داریم. نقاط گوشه‌های مربع‌های واحد جدول را رأس و اضلاع آن‌ها را یال در نظر بگیرید؛ به این ترتیب یک گراف به دست می‌آید. برای مثال به ازای  $m = 3$  و  $n = 4$  گرافی با ۲۰ رأس و ۳۱ یال به شکل زیر به دست می‌آید:



به این گراف، گراف جدولی حاصل از یک جدول  $m \times n$  گوییم. فرض کنید  $G$  یک گراف جدولی و  $T$  یک زیردرخت فراگیر از آن باشد. به ازای هر خانه از جدول، تعداد یال‌هایی از  $T$  را که ضلع آن خانه هستند، استحکام آن خانه می‌نامیم.

\_\_\_\_\_ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید \_\_\_\_\_

۱۴ به ازای  $m = 10$  و  $n = 10$ ، کمینه‌ی مجموع استحکام خانه‌ها را در میان تمام زیردرخت‌های فراگیر ممکن بیابید.

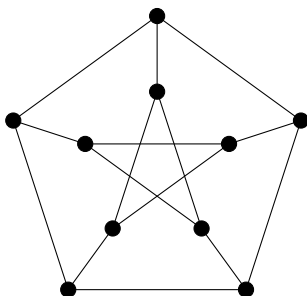
(۱) ۲۰۱      (۲) ۱۹۹      (۳) ۱۲۰      (۴) ۱۳۹      (۵) ۲۴۰

مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۵ دوام هر خانه را مجذور استحکام آن (استحکام به توان دو) در نظر می‌گیریم. به ازای  $m = 10$  و  $n = 10$ ، کمینه‌ی مجموع دوام خانه‌ها را در میان تمام زیردرخت‌های فراگیر ممکن بیابید.

۹۰۱ (۱)      ۴۰۱ (۲)      ۳۰۱ (۳)      ۲۹۲ (۴)      ۴۰۵ (۵)

سال‌ها پیش فردی به نام پترسن گراف زیر را از صندوق‌چه‌ی سلطان دزدید و به نام خود زد!



سلطان دلش برای این گراف تنگ شده است و می‌خواهد اندکی با آن بازی کند! او در ابتدا رأس‌های گراف را با قرمز و آبی رنگ می‌کند. سپس هر مرحله به طور همزمان رنگ هر رأس را برابر با رنگی قرار می‌دهد که در همسایه‌هایش بیش‌تر تکرار شده است.

\_\_\_\_\_ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید \_\_\_\_\_

۱۶ سلطان در ابتدا به چند طریق می‌تواند سه رأس را قرمز و بقیه را آبی کند، طوری که هم‌واره حداقل یک رأس قرمز در گراف باقی بماند؟ رأس‌های گراف را متمایز در نظر بگیرید.

۵ (۱)      ۱۲۰ (۲)      ۳۰ (۳)      ۲۰ (۴)      ۱۲ (۵)

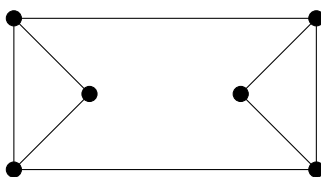
۱۷ کمینه‌ی  $k$  را بیابید، طوری که سلطان در ابتدا به هر روشی که  $k$  رأس را قرمز و بقیه را آبی کند، هم‌واره دست کم یک رأس قرمز در گراف باقی بماند.

۵ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۷ (۴)      ۶ (۵)

سلطان به تازگی شهردار خوش‌آباد شده و می‌خواهد به روان شدن ترافیک شهر کمک کند. استراتژی او، یک‌طرفه کردن خیابان‌هاست. از طرفی او دوست ندارد با این کار، فاصله‌ی قسمت‌های مختلف شهر از هم خیلی زیاد شود. در هر سوال، گراف خیابان‌ها و تقاطع‌های یک محله داده می‌شود (رأس‌های گراف، تقاطع‌ها و یال‌های آن، خیابان‌های محله هستند) و از شما در مورد یک‌طرفه کردن خیابان‌های آن پرسشی صورت خواهد گرفت. در هر سه سوال، رأس‌های (تقاطع‌های) گراف را متمایز در نظر بگیرید.

\_\_\_\_\_ با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید \_\_\_\_\_

۱۸ محله‌ی کوچک رامتینک در این شهر گرافی به شکل زیر دارد:

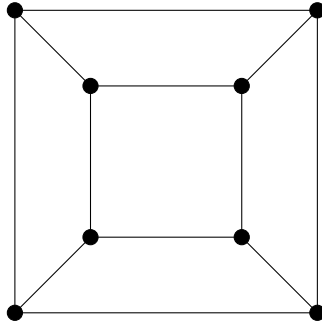


مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

سلطان می‌خواهد تمام خیابان‌های این محله را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب  $(X, Y)$  از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر چهار خیابان از  $X$  به  $Y$  برسیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

- ۰ (۵)                      ۶ (۴)                      ۴ (۳)                      ۸ (۲)                      ۲ (۱)

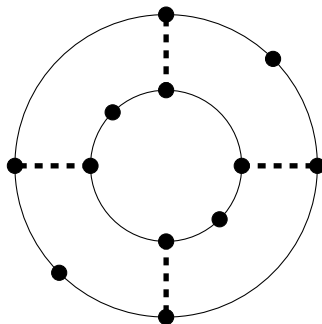
۱۹ محله‌ی قدیمی میرزا محمد خان گرافی به شکل زیر دارد:



سلطان می‌خواهد تمام خیابان‌های این محله را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب  $(X, Y)$  از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر سه خیابان از  $X$  به  $Y$  برسیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

- ۰ (۵)                      ۱۲ (۴)                      ۲۴ (۳)                      ۴ (۲)                      ۳۲ (۱)

۲۰ محله‌ی زیبای پارسایان گرافی به شکل زیر دارد:



در این سوال بر خلاف دو سوال قبل، سلطان نمی‌خواهد تمام خیابان‌ها را یک‌طرفه کند، زیرا چهار خیابان مشخص شده با خط‌چین به اندازه‌ی کافی عریض هستند و نیازی به یک‌طرفه شدن آن‌ها نیست. سلطان به چند طریق می‌تواند تمام ۱۲ خیابان دیگر را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب  $(X, Y)$  از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر پنج خیابان از  $X$  به  $Y$  برسیم؟

- ۹۶ (۵)                      ۱۲ (۴)                      ۲ (۳)                      ۴ (۲)                      ۰ (۱)